Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
08.07.2008
Blatt 12

# Übungen zu „Mathematik IV für Physiker“

1. Sei $\omega_n > 0$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel $\mathbf{B}^n$, $\omega_n = \lambda(\mathbf{B}^n)$. Zeigen Sie für den Oberflächeninhalt $\tau_{n-1}$ von $S^{n-1} \subseteq \mathbf{R}^n$, $\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1})$:
$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$
(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gauß mit dem Vektorfeld $X = \mathrm{id}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.)

2. Sei $K \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand $M$, $\nu\colon M \to \mathbf{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld und $f\colon K \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar. Wir bezeichnen mit $D_\nu f\colon M \to \mathbf{R}$ ihre *Normalenableitung entlang* $M$, d.h:
$$D_\nu(x) := \langle \mathrm{grad}(f)(x), \nu(x)\rangle.$$
Beweisen Sie nun folgende *Integralformel von Green*: Sind $f, g\colon K \to \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt:
$$\int_K (f\triangle g - g\triangle f)\, dV = \int_{\partial K} (fD_\nu g - gD_\nu f)\, dS.$$
(Hinweis: Divergenzsatz mit dem Vektorfeld $X = f\mathrm{grad}(g) - g\mathrm{grad}(f)$)

3. (a) Zeigen Sie: Ist $G \subseteq \mathbf{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet und $X\colon G \to \mathbf{R}^3$ ein rotationsfreies (stetig differenzierbares) Vektorfeld auf $G$, $\mathrm{rot}(X) = 0$, so gibt es eine (zweimal stetig differenzierbare) Funktion $\Phi\colon G \to \mathbf{R}$ mit $\mathrm{grad}(\Phi) = X$. (Hinweis: Ist $p \in G$ ein Sternpunkt, $x \in G$ und $\gamma_x\colon [0,1] \to G$ der geradlinige Weg von $p$ nach $x$, so setze man
$$\Phi(x) := \int_{\gamma_x} X \cdot \vec{ds}\ (= \int_0^1 \langle X(\gamma_x(t)), \dot\gamma_x(t)\rangle\, dt).)$$
   (b) Das Grundproblem in der *Elektrostatik* besteht darin, bei einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho\colon G \to \mathbf{R}$, ($G \subseteq \mathbf{R}^3$ ein Gebiet), das elektrische Feld $E\colon G \to \mathbf{R}^3$ so zu bestimmen, dass gilt: $\mathrm{div}(E) = \rho$, $\mathrm{rot}(E) = 0$. Zeigen Sie: Ist $G$ sternförmig, so gibt es dann ein (Potential) $\Phi\colon G \to \mathbf{R}$ mit $E = \mathrm{grad}(\Phi)$ und
$$\triangle\Phi = \rho \ \text{(Poisson-Gleichung)}.$$

**Abgabe: Dienstag, 15. Juli 2008, 11.00 Uhr**