

## Klausur zu „Mathematik IV für Physiker“

**Klausur-Nr.:**

**Name, Vorname:**

**Geburtsdatum:**

**Matrikel-Nr.:**

1. Welche der folgenden Funktionen auf  $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$  sind holomorph? Begründen Sie:

$$f_1(x, y) = (-y, x), \quad f_2(x, y) = (e^{x^2+y^2}, 0), \quad f_3(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad f_4(x, y) = (xy, 1)$$

2. Sei  $f: \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{C}$  gegeben durch  $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ . Begründen Sie, warum  $f$  keine Stammfunktion besitzt.

3. Wir betrachten die Funktion  $\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\cot$  holomorph auf  $\mathbf{C}$  mit isolierten Singularitäten in  $\{k\pi \in \mathbf{C} : k \in \mathbf{Z}\}$  ist.

(b) Welcher Art sind diese Singularitäten?

(c) Bestimmen Sie die Residuen von  $\cot$  in  $z = k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

4. Sei  $\mathbf{B}^3 \subseteq \mathbf{R}^3$  der Einheitsball und  $K := \{(x, y, z) \in \mathbf{B}^3 : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ . Berechnen Sie das Volumen von  $K$ .