Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2008
07.10.2008

Nachklausur zu „Mathematik IV für Physiker“

Klausur-Nr.:

Name, Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikel-Nr.:

1. Sei $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = \bar{z}^2$.
   (a) Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie
   $$\int_\gamma f(z)\, dz \,.$$
   (b) Begründen Sie, warum es einen geschlossenen Weg α in $\mathbf{C}$ geben muss mit $\int_\alpha f(z)\, dz \neq 0$.

2. Sei $f\colon \mathbf{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbf{C}$, $f(z) = (1 + z^2)^{-2}$.
   (a) Bestimmen Sie das Residuum von f in $z_0 = i$.
   (b) Zeigen Sie mit dem Residiensatz:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \,.$$

3. Sei $E \subseteq \mathbf{R}^2$ die Ellipse mit Hauptachsenlängen $a, b > 0$,
   $$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \,.$$
   Zeigen Sie mit Hilfe der Transformationsformel (und der Kenntnis des Flächeninhaltes der Einheitskreisscheibe), dass für den Flächeninhalt A von E gilt:
   $$A = ab\pi \,.$$

4. Sei $S^2 \subseteq \mathbf{R}^3$ die Einheitssphäre. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Polkappen
   $$K = \{(x, y, z) \in S^2 :\ |z| \geq \frac{1}{2}\} \,.$$