Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
25.04.2008

Mathematische Physik II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Fouriertransformierte einer Gaußfunktion

Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) := \mathrm{e}^{-ax^2/2}$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt und $\hat{f}$ gegeben ist durch

$$\hat{f}(k) \;=\; a^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-k^2/(2a)}.$$

Aufgabe 2: Fouriertransformation von Translation und Dilatation

a) Sei $a \in \mathbb{R}^d$ und $T_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \mapsto (T_a f)(x) := f(x-a)$ die Translation um a. Schreiben Sie T_a als Pseudodifferentialoperator $T_a = t_a(-\mathrm{i}\nabla_x)$ für eine geeignete Funktion $t_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$.

b) Sei $p \in [1,\infty)$, $\sigma > 0$ und $D^p_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \mapsto (D^p_\sigma f)(x) := \sigma^{-d/p} f(x/\sigma)$ die L^p-Dilatation mit σ.

   i) Zeigen Sie, dass D^p_σ stetig und $\|D^p_\sigma f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ ist.

   ii) Wie muss man $\tilde{D}^p_\sigma : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definieren, wenn man D^p_σ fortsetzen will?

   iii) Berechnen Sie $\widehat{D^2_\sigma f}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3: Faltung

Sei $f \in C(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$. Setze $f_\sigma := f * (D^1_\sigma \varphi)$, wobei D^1_σ die L^1-Dilatation aus Aufgabe 2 ist.

a) Zeigen Sie, dass $f_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $f_\sigma(x) \xrightarrow{\sigma \to 0} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

   Tipp: Zerlegen Sie das Integral in $B_\delta(x)$ und $\mathbb{R}^d \setminus B_\delta(x)$ und wählen Sie δ geeignet!

c) Zeigen Sie, dass die Konvergenz in b) auf jedem Kompaktum gleichmäßig ist.

Aufgabe 4: Wärmeleitungsgleichung

a) Sei $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Bestimmen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t,x) &= \Delta_x \psi(t,x) \qquad && \forall\ (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ \psi(0,x) &= \psi_0(x) && \forall\ x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

   mit Hilfe der Fouriertransformation und geben Sie sie in der Form

$$\psi(t,x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} K(t,x-y)\psi_0(y)\,dy \tag{1}$$

   mit einer expliziten Funktion $K : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ an.

b) Sei nun $\psi_0 \in C(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Zeigen Sie, dass durch (1) eine beschränkte Funktion $\psi \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ definiert wird, welche die Wärmeleitungsgleichung auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ löst. Zeigen Sie weiterhin, dass ψ bei $t = 0$ durch ψ_0 stetig fortsetzbar ist, d.h. $\lim_{t \to 0} \psi(t,x) = \psi_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

   Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 3!

Abgabe: Freitag, 02.05.2008, in der Vorlesung.