Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
02.05.2008

# Mathematische Physik II

Übungsblatt 2

**Aufgabe 5: Ableitungen der Heavyside-Distribution**

Sei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die sogenannte Heavyside-Funktion, d.h.

$$\Theta(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

und $T_\Theta$ die zugehörige Distribution. Berechnen Sie die distributionellen Ableitungen von $T_\Theta$ zu beliebiger Ordnung.

**Aufgabe 6: Fortsetung stetiger linearer Abbildungen**

Sei $X$ ein normierter Raum, $Y$ ein Banachraum, $Z \subset X$ ein dichter Unterraum und $A \in \mathcal{L}(Z, Y)$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige stetige Fortsetzung von $A$ gibt, d.h. ein $\overline{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit

$$\overline{A}|_Z \;=\; A \qquad \& \qquad \|\overline{A}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \;=\; \|A\|_{\mathcal{L}(Z,Y)}.$$

**Aufgabe 7: Riemann-Lebesgue-Lemma**

a) Zeigen Sie, dass $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist.

*Erinnerung:* $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum der abfallenden stetigen Funktionen,

$$C_\infty(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) \mid \lim_{R\to\infty} \|f \chi_{B_R^c}\|_\infty = 0\}\,,$$

wobei $B_R^c$ das Komplement der Kugel mit Radius $R$ um den Ursprung in $\mathbb{R}^d$ und $\chi_{B_R^c}$ die charakteristische Funktion darauf bezeichne.

b) Zeigen Sie das Lemma von Riemann-Lebesgue:

$$\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^d) \;\subset\; C_\infty(\mathbb{R}^d).$$

Zeigen Sie dazu zunächst die Stetigkeit von $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\,.\,\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}) \to C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Nutzen Sie dann die Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und Aufgabe 6, um $\mathcal{F}$ stetig auf $L^1$ fortzusetzen. Warum stimmt diese Fortsetzung mit dem durch die übliche Formel gegebenen $\mathcal{F}$ überein?

**Aufgabe 8: Netzstetigkeit**

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $X, Y$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn $f$ netzstetig ist, also konvergente Netze auf konvergente Netze abbildet.

**Abgabe:** Freitag, 09.05.2008, in der Vorlesung.