Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
09.05.2008

Mathematische Physik II

Übungsblatt 3

Aufgabe 9: Multiplikationsoperatoren
Sei $V : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

a) Zeigen Sie: V definiert genau dann einen stetigen Multiplikationsoperator $M_V : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d), \psi \mapsto V\psi$, wenn $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt, und in diesem Fall ist $\|M_V\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

b) Zeigen Sie, dass M_V mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(M_V) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) \,|\, V\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ eine unitäre Gruppe $(U(t))_t$ erzeugt, falls $\mathcal{D}(M_V)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, und bestimmen Sie diese Gruppe.

c) Zeigen Sie, dass $(U(t))_t$ genau dann normstetig ist, wenn $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist.

Erinnerung: $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum wesentlich beschränkten Funktionen,

$$L^\infty(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \text{ messbar} \,\Big|\, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} := \inf_{\{\Omega\subset\mathbb{R}^d|\mu(\Omega)=0\}} \sup_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega} |f| < \infty \Big\}.$$

Aufgabe 10: Translationsgruppen

a) Sei $a \in \mathbb{R}^d$ und $\big(T_a(t)\big)_t$ die Translationsgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ (siehe Aufgabe 2).

  i) Zeigen Sie, dass der Erzeuger von T_a gegeben ist durch $-\mathrm{i}a\cdot\nabla$ mit Domäne $\{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d \,|\, a\cdot k\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$.

  ii) Zeigen Sie, dass $T_a(t)$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ für $t \to \infty$ schwach, jedoch nicht stark gegen 0 konvergiert.

b) Definieren Sie $H^m(\mathbb{S}^1)$ analog zu $H^m(\mathbb{R}^d)$, indem Sie $\mathbb{S}^1$ als $[0,1]$ mit Identifikation von 0 und 1 auffassen und Fourierreihen statt Fouriertransformation verwenden.

c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $-\mathrm{i}a\, d/dx$ mit Domäne $H^1(\mathbb{S}^1)$ eine unitäre Gruppe erzeugt, und geben Sie diese an.

Aufgabe 11: Faltung
Sei $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

a) Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie unter Verwendung der Hölder-Ungleichung, also

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \;\le\; \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}\,\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$$

für $1/r + 1/q = 1$, dass

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \;\le\; \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

b) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi \ge 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi = 1$. Setze $f_\sigma := f * (D_\sigma^1\varphi)$, siehe Aufgabe 3. Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass f_σ für $\sigma \to 0$ in L^p gegen f konvergiert, d. h.

$$\lim_{\sigma\to 0}\|f_\sigma - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \;=\; 0.$$

Tipp: Benutzen Sie, dass $C_0(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ dicht ist, und Aufgabe 3!

Abgabe: Freitag, 23.05.2008, in der Vorlesung.