Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
23.05.2008

Mathematische Physik II

Übungsblatt 4

Aufgabe 12: Schrödingergleichung als System zweier reellwertiger Gleichungen
Sei $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ eine Lösung der Schrödingergleichung mit Potential V.

a) Setze $\psi_1 := \operatorname{Re}\psi$ und $\psi_2 := \operatorname{Im}\psi$. Leiten Sie ein System zweier Differentialgleichungen für ψ_1 und ψ_2 her und schreiben Sie dies in der Form

$$\partial_t \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

mit geeigneten Operatoren A, B, C, D.

b) Seien ρ und S über $\psi = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{iS}$ definiert. Leiten Sie ein System zweier Differentialgleichungen für ρ und S her.

Aufgabe 13: Unitäre Gruppen mit beschränkten Erzeugern
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}Ht)^n}{n!}$$

eine von $(H, \mathcal{H})$ erzeugte unitäre Gruppe definiert, die in t uniform differenzierbar ist.

Aufgabe 14: (Nicht-)Abschließbare Operatoren

a) Sei T abschließbar, d.h. T besitzt eine abgeschlossene Erweiterung. Zeigen Sie, dass $\overline{\Gamma(T)}$ dann der Graph eines linearen Operators $\overline{T}$ ist.

b) Sei T symmetrisch, also abschließbar. Zeigen Sie, dass $\overline{T}$ ebenfalls symmetrisch ist.

c) Zeigen Sie, dass die Dirac-Distribution $(\delta, \underline{C_0(\mathbb{R}))}$ als unbeschränkter Operator von $L^2(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$ nicht abschließbar ist. Bestimmen Sie $\overline{\Gamma(\delta)}$.

Aufgabe 15: Satz von Rellich

a) Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und (ψ_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ für alle n. Zeigen Sie, dass (ψ_n) eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.
Tipp: Satz von Bolzano-Weierstraß und Diagonalfolgenargument!

b) Geben Sie ein Skalarprodukt an, welches $H^m(\mathbb{R}^d)$ zu einem Hilbertraum macht.

c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir definieren $H^m(\Omega) := \{\psi|_\Omega \,|\, \psi \in H^m(\mathbb{R}^d)\}$. Zeigen Sie, dass die Einbettung von $H^1(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ kompakt ist (Satz von Rellich), d.h. jede Folge (ψ_n), die in $H^1(\Omega)$ unabhängig von n beschränkt ist, besitzt eine Teilfolge, die in $L^2(\Omega)$ stark konvergiert.
Anleitung: Gehen Sie zunächst über zu $H^1(\mathbb{R}^d)$, indem Sie die Funktionen ψ_n zu Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^d$ fortsetzen. Beschaffen Sie sich dann eine in $H^1(\mathbb{R}^d)$ schwach konvergente Teilfolge. Zeigen Sie, dass für diese Teilfolge die Fouriertransformierte punktweise konvergiert, wobei Sie den kompakten Träger der Fortsetzungen ausnützen. Mit Hilfe der punktweisen Konvergenz zeigt man die L^2-Konvergenz der Fouriertransformierten auf $B_R := \{k \in \mathbb{R}^d \,|\, |k| \leq R\}$ unabhängig von $R > 0$. Zeigen Sie nun noch die L^2-Konvergenz auf dem Komplement B_R^C und setzen Sie alles zusammen!

Abgabe: Freitag, 30.05.2008, in der Vorlesung.