Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
30.05.2008

# Mathematische Physik II

Übungsblatt 5

**Aufgabe 16: Neumannsche Reihe**
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|T\| < 1$. Zeigen Sie, dass $1 - T$ invertierbar ist mit

$$(1-T)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Zeigen Sie weiter, dass jedes $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ invertierbar ist, falls $\|1 - T\| < 1$.

**Aufgabe 17: Polarisation**
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$.

a) Sei $C$ eine anti-lineare Isometrie. Zeigen Sie, dass

$$\langle C\psi, C\varphi\rangle \;=\; \langle \varphi, \psi\rangle \quad \forall\, \psi, \varphi \in \mathcal{H}.$$

b) Zeigen Sie, dass $(T, \mathcal{D}(T))$ symmetrisch ist, falls

$$\langle \psi, T\psi\rangle \;\in\; \mathbb{R} \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(T).$$

**Aufgabe 18: Laplace-Operator auf einem Intervall**
Wir betrachten $\big(-\frac{1}{2}\Delta, C_0^\infty(0,\pi)\big)$ als unbeschränkten Operator auf $L^2[0,\pi]$.

a) Bestimmen Sie alle selbstadjungierten Erweiterungen von $\big(-\frac{1}{2}\Delta, C_0^\infty(0,\pi)\big)$, indem sie alle unitären Erweiterungen der Cayley-Transformierten geeignet parametrisieren und damit den Definitionsbereich der zugehörigen Erweiterung von $-\frac{1}{2}\Delta$ bestimmen.

b) Wir definieren

$$\begin{aligned} H^2_D(0,\pi) &:= \{\psi \in H^2(0,\pi) \,|\, \psi(0) = 0 = \psi(1)\},\\ H^2_N(0,\pi) &:= \{\psi \in H^2(0,\pi) \,|\, \psi'(0) = 0 = \psi'(1)\} \end{aligned}$$

und nennen $\Delta_D = \big(-\frac{1}{2}\Delta, H^2_D(0,\pi)\big)$ den Dirichlet- und $\Delta_N = \big(-\frac{1}{2}\Delta, H^2_N(0,\pi)\big)$ den Neumann-Laplace-Operator. Für welche Parameter in a) erhält man $\Delta_D$ bzw. $\Delta_N$?

c) Berechnen Sie $\sigma(\Delta_D)$ und $\sigma(\Delta_N)$.

**Aufgabe 19: Spektrum von Multiplikationsoperatoren**
Sei $(X,\mu)$ $\sigma$-endlicher Maßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu$-messbar und $\mu$-fast überall endlich. Wir definieren $D := \{\psi \in L^2(X,\mu) \,|\, f\psi \in L^2(X,\mu)\}$.

a) Zeigen Sie, dass $D$ dicht in $L^2(X,\mu)$ ist und der Multiplikationsoperator $(M_f, D)$ auf $L^2(X,\mu)$ selbstadjungiert ist.

b) Zeigen Sie, dass $\sigma(M_f) = \operatorname{ess\,ran} f$ ist, wobei

$$\operatorname{ess\,ran} f \;:=\; \Big\{\lambda \in \mathbb{R} \,\Big|\, \mu\big(f^{-1}(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)\big) > 0 \;\forall\, \varepsilon > 0\Big\}.$$

*Tipp:* Was ist die Resolvente eines Multiplikationsoperators?

**Aufgabe 20: Abgeschlossenheit und Spektrum**
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum. Zeigen Sie, dass $T$ abgeschlossen ist, falls $\sigma(T) \neq \mathbb{C}$.

**Abgabe:** Freitag, 06.06.2008, in der Vorlesung.