Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
06.06.2008

Mathematische Physik II

Übungsblatt 6

Aufgabe 21: Resolventenkonvergenz
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(A, \mathcal{D}(A))$ selbstadjungierter Operator und $(A_n, \mathcal{D}(A_n))_n$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren.

a) Zeigen Sie, dass aus $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le C$ folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n) - R_z(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0.$$

b) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$\forall\, \psi \in \mathcal{D}(A) \;\; \exists\, \big(\psi_n \in \mathcal{D}(A_n)\big)_n : \lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \|A_n\psi_n - A\psi\|_{\mathcal{H}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \;\; \forall\, \psi \in \mathcal{H} : \lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n)\psi - R_z(A)\psi\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0.$$

Aufgabe 22: Operatorbeschränktheit
Sei A, B dicht definiert mit $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Zeigen Sie, dass

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R} \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(A) : \|B\varphi\| \;\le\; a\,\|A\varphi\| \,+\, b\,\|\varphi\|$$
$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R} \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(A) : \|B\varphi\|^2 \;\le\; \tilde{a}^2\,\|A\varphi\|^2 \,+\, \tilde{b}^2\,\|\varphi\|^2$$

und das Infimum aller zulässigen a stimmt mit dem Infimum aller zulässigen $\tilde{a}$ überein.

Aufgabe 23: Hardy-Ungleichung

a) Zeigen Sie, dass es für alle $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3)$ ein $C < \infty$ gibt, so dass

$$\||x|^{-1}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le\; C\,\|\nabla\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

b) Zeigen Sie, dass es für alle $\psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$ gibt, so dass

$$\|\nabla\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le\; \varepsilon\,\|\Delta\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \,+\, C_\varepsilon\,\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

c) Zeigen Sie, dass es für alle $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3)$ und $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$ gibt, so dass

$$\||x|^{-1}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le\; \varepsilon\,\|\Delta\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \,+\, C_\varepsilon\,\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Folgern Sie dann die Gültigkeit der Abschätzung auf ganz H^2.

Aufgabe 24: Cauchy-Integralformel für Operatoren
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = R$. Seien $f, g : B_{R+2}(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Wir definieren

$$f(T) \;:=\; -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_{R+1}(0)} f(z)\, R_z(T)\, dz.$$

Zeigen Sie, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(T) + \beta g(T) \;=\; (\alpha f + \beta g)(T) \quad \& \quad f(T)\cdot g(T) \;=\; (f\cdot g)(T).$$

Abgabe: Freitag, 13.06.2008, in der Vorlesung.