Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
13.06.2008

Mathematische Physik II

Übungsblatt 7

Aufgabe 25: Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(H, \mathcal{D}(H))$ selbstadjungierter Operator und $(\varphi_n \in \mathcal{D}(H))_n$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen, d.h. es gibt (λ_n) mit $H\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$. Für beschränktes und messbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir $f(H)$ durch

$$f(H)\psi \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\langle \varphi_n, \psi\rangle \varphi_n.$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein Funktionalkalkül definiert wird.

Aufgabe 26: Eigenschaften der Funktionenklasse $\mathcal{A}$
In der Vorlesung wurden die Funktionenklasse $\mathcal{A}$ und dazugehörige Normen $\|\cdot\|_n$ definiert.

a) Seien $f, g \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass auch $f \cdot g \in \mathcal{A}$.

b) Sei $f \in \mathcal{A}$ mit $\|f\|_1 < \infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

c) Sei $f \in \mathcal{A}$ und (f_n) eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, die Folge also gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 27: Helffer-Sjöstrand-Formel
Sei $(H, \mathcal{D}(H))$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} f \cap \sigma(H) = \emptyset$. Sei $f(H)$ durch die Formel aus der Vorlesung (Helffer-Sjöstrand-Formel) gegeben. Zeigen Sie, dass $f(H) = 0$ ist.

Aufgabe 28: Anwendung der Helffer-Sjöstrand-Formel

a) Sei $(H, \mathcal{D}(H))$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir definieren auf $\mathcal{D}(H)$ die Graphennorm $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(H)}$ durch $\|\psi\|^2_{\mathcal{D}(H)} \ := \ \|\psi\|^2_{\mathcal{H}} + \|H\psi\|^2_{\mathcal{H}}$. Da H abgeschlossen ist, macht diese Norm $\mathcal{D}(H)$ zu einem Hilbertraum, also inbesondere zu einem Banachraum. Zeigen Sie, dass
$$\|R_z(H)\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(H))} \ \leq \ 2 + \frac{1 + 2|z|^2}{|\mathrm{Im} z|^2}.$$

b) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{D}(H))$ mit $\big\|[A, H]\big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(H),\mathcal{H})} \ \leq \ \delta$. Zeigen Sie, dass es ein $C < \infty$ gibt, so dass
$$\|[f(H), A]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(H))} \ \leq \ C\,\delta,$$
wobei $f(H)$ wiederum durch die Helffer-Sjöstrand-Formel gegeben sei.

Abgabe: Freitag, 20.06.2008, in der Vorlesung.