Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
20.06.2008

Mathematische Physik II

Übungsblatt 8

Aufgabe 29: Invariante Räume
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(H, \mathcal{D}(H))$ ein selbstadjungierter Operator und $L \subset \mathcal{H}$ ein H-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass aus $\varphi \in L \cap \mathcal{D}(H)$ folgt, dass $H\varphi \in L$.

Aufgabe 30: Zyklische Vektoren
Sei $\mathcal{H}$ endlich-dimensionaler Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass A genau dann einen zyklischen Vektor besitzt, wenn alle Eigenwerte von A einfach sind.

Aufgabe 31: Konvergenz von stetigen Funktionen eines Operators
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(A, \mathcal{D}(A))$ selbstadjungierter Operator und $(A_n, \mathcal{D}(A_n))_n$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren. Zeigen Sie, dass aus

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n) - R_z(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0$$

folgt, dass für beliebiges $f \in C_\infty(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} \|f(A_n) - f(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass das Integral in der Helffer-Sjöstrand-Formel als Bochner-Integral aufgefasst werden kann und daher $\| \int_{\mathbb{C}} A dz\| \leq \int_{\mathbb{C}} \|A\| dz$ gilt.

Abgabe: Freitag, 27.06.2008, in der Vorlesung.