Prof. S. Teufel, J. Wachsmuth
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2008
27.06.2008

Mathematische Physik II

Übungsblatt 9

Aufgabe 32: Trotter-Produktformel
Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass es ein von n unabhängiges $C < \infty$ gibt, so dass

$$\left\| \mathrm{e}^{(A+B)t} - \left(\mathrm{e}^{At/n}\mathrm{e}^{Bt/n}\right)^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;\leq\; C/n.$$

b) Zeigen Sie, dass es ein von n unabhängiges $C < \infty$ gibt, so dass

$$\left\| \mathrm{e}^{(A+B)t} - \left(\mathrm{e}^{Bt/(2n)}\mathrm{e}^{At/n}\mathrm{e}^{Bt/(2n)}\right)^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;\leq\; C/n^2.$$

Aufgabe 33: Weyls Kriterium
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $(H, \mathcal{D}(H))$ ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \sigma(H)$ genau dann, wenn eine Folge (ψ_n) in $\mathcal{D}(H)$ existiert mit $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|H\psi_n - \lambda\psi_n\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0.$$

Aufgabe 34: Konvergenz des Spektrums
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(A, \mathcal{D}(A))$ ein selbstadjungierter Operator und $(A_n, \mathcal{D}(A_n))_n$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren. Es gelte

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\ \forall\, \psi \in \mathcal{H}: \ \lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n)\psi - R_z(A)\psi\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0.$$

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\mu = (a+b)/2 + \mathrm{i}(b-a)/2$. Zeigen Sie, dass $(a,b) \cap \sigma(A) = \emptyset$ genau dann, wenn $\|R_\mu(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sqrt{2}/(b-a)$.

Tipp: Darstellung der Resolvente als Reihe von Resolventen!

b) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $(a,b) \subset \rho(A_n)$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie mittels a), dass auch $(a,b) \subset \rho(A)$. Folgern Sie daraus, dass es zu jedem $\lambda \in \sigma(A)$ eine Folge (λ_n) gibt mit $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ und

$$\lambda_n \to \lambda \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 35: Konvergenz von Resolventenmenge und Spektralprojektionen
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(A, \mathcal{D}(A))$ ein selbstadjungierter Operator und $(A_n, \mathcal{D}(A_n))_n$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren. Es gelte $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}: \ \lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n) - R_z(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0$.

a) Zeigen Sie: Falls $\mu \in \rho(A)$, dann ist $\mu \in \rho(A_n)$ für n groß genug und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|R_\mu(A_n) - R_\mu(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0.$$

b) Seien $a, b \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ und $a < b$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|1_{(a,b)}(A_n) - 1_{(a,b)}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0.$$

Tipp: Verwenden Sie a) und die Aufgaben 27 & 31!

Abgabe: Freitag, 04.07.2008, in der Vorlesung.