Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 09

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 15.10.2009

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 104 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)
Sei

$$I_n := \int_0^{2\pi} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

a) Zeigen Sie: $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}\ \forall\ n \geq 1$
HINWEIS: Partielle Integration hilft.
b) Bestimmen Sie den Wert von I_0, I_1, I_3 und I_4.

Aufgabe 2 (12 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{3-x^2}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad \text{HINWEIS: Partialbruchzerlegung}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP)

$$\frac{y'(x)}{y(x)} + 5y(x)\,\cos x = 0\,, \qquad y(0) = \frac{5}{2}\,.$$

Aufgabe 4 (4+4+2 Punkte)

a) Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden homogenen DGL an,

$$\frac{y''}{2} + 2y = 0\,.$$

b) Geben Sie alle reellen Lösungen der folgenden inhomogenen DGL an,

$$\frac{y''}{2} + 2y = \mathrm{e}^{-x}\,.$$

c) Lösen Sie das AWP

$$\frac{y''}{2} + 2y = \mathrm{e}^{-x}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$6x^2 + 6xy + 14y^2 = 5$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und skizzieren Sie ihn.

Aufgabe 6 (4+6 Punkte)

Eine Kurve

$$\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\,\cos t \\ r(t)\,\sin t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad r(t) = 1 + a\cos t\,, \quad t \in [0, 2\pi),$$

mit festem $a \in (0,1)$ heißt Pascalsche Schnecke.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Pascalschen Schnecke mit den Koordinatenachsen.

b) Berechnen Sie den Inhalt der von der Pascalschen Schnecke eingeschlossenen Fläche.

Hinweis: Polarkoordinaten sind hilfreich, und sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \pi$ verwenden.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 2x\,\cos y \\ -x^2 \sin y - 2y\mathrm{e}^z \\ (1-y^2)\mathrm{e}^z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t^2} \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0, \pi].$$

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima, sowie alle Sattelpunkte von

$$f(x,y) = \cosh(x) + y^2 - y^4$$

d.h. geben Sie jeweils die kritische Stelle, den Funktionswert an der kritischen Stelle und die Art des kritischen Punkts (Minimum, Maximum oder Sattel) an.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen $V(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} \mathrm{d}V$ des Torus'

$$\mathcal{T} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} (2 + r\sin u)\cos v \\ (2 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} \;,\; 0 \le r \le 1\,,\; 0 \le u < 2\pi\,,\; 0 \le v < 2\pi \right\}.$$

Aufgabe 10 (9+3 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$A :=$ "Es wird mindestens eine ⚅ gewürfelt."

$B :=$ "Es wird genau eine ⚂ gewürfelt."

a) Berechnen Sie $P(A)$ und $P(A \cap B)$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine ⚂ gewürfelt wird, unter der Bedingung, dass mindestens eine ⚅ gewürfelt wurde.