Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2011
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe ausnahmsweise am **Mittwoch, 22.6.2011, vor 13:00,** in die vor C6P43 ausgelegten Mappen.)

Aufgabe 38 (10 Punkte)
Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Paraboloids

$$\{(x, y, x^2 + y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 6\} \subset \mathbb{R}^3.$$

HINWEIS: Zylinderkoordinaten sind hilfreich.

Aufgabe 39 (10 Punkte)
Berechnen Sie die Oberfläche des Torus $\mathcal{T}$ aus den Aufgaben 24 und 34.

Aufgabe 40 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2\,,\ z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S.
HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 41 (10 Punkte)

a) Sei $\lambda > 0$. Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x$.
HINWEIS: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\vec{x}^T D \vec{x}} \,\mathrm{d}V = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit. Bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\vec{x}^T A \vec{x}} \,\mathrm{d}V$.
HINWEIS: Laut Satz 24 existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $U^T A U$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich an.