Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2013
08.10.2013

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Nachklausur zu „Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

Klausuraufgabe zu Gewöhnliche Differentialgleichungen: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Wir betrachten das lineare System 1. Ordnung auf $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = Ax.$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ein Lösungs-Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$ ist.

b) (2 Punkte) Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ setzt man $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (welches für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ konvergiert). Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alle Potenzen A^k (für $k \in \mathbb{N}_0$) und zeigen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(t) = \exp(tA).$$

Klausuraufgabe zu Fourierreihen: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, die auf $[0, 2\pi]$ quadratintegrierbar ist.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Ist f gerade, so hat die reelle Fourierreihe von f keine Sinusterme, d.h. es gibt $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, so dass die Fourierreihe von f durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

gegeben ist.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$, für $|x| \leq \pi$.