

Mathematik II für Biologen
Zufallsvariable: Verteilungen & Kennzahlen

Stefan Keppeler

7. Juni 2013



Zufallsvariable

Definition

Kennzahlen: Erwartungswert

Kennzahlen: Varianz

Kennzahlen: Erwartungstreue

Verteilungsfunktion

Poisson-Verteilung

Stetige Zufallsvariable

Definition

Beispiel: Exponentialverteilung



Definition: Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Zufallsvariable** (Zufallsgröße). Sie heißt **diskret**, falls sie nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen kann.

Bemerkung: Jede Teststatistik ist eine Zufallsvariable, z.B. Spermasexing: $\Omega = \{\sigma, \varphi\}^{12}$, $X = \#\varphi$,
d.h. z.B. $X(\varphi, \varphi, \varphi, \varphi, \sigma, \varphi, \varphi, \varphi, \varphi, \sigma, \varphi, \varphi) = 10$

Kennzahlen: Erwartungswert $E[X]$, Varianz $\text{Var}(X)$, Standardabweichung, Median...

Vorsicht: Nicht verwechseln mit den Begriffen für Stichproben! (siehe auch später...)



Definition: Der **Erwartungswert** einer diskreten Zufallsvariable X ist

$$E[X] := \sum_k k \cdot P[X = k]$$

Beispiele:

- ▶ X : Ergebnis eines fairen Würfelwurfs

$$E[X] = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1 + 2 + \dots + 6}{6} = 3,5$$

- ▶ $X \sim \text{Bin}(n, p)$: $E[X] = np$

Beweis: 

Linearität (X, Y : Zufallsvariablen, $a, b \in \mathbb{R}$)

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y],$$

insbesondere $E[a + bX] = a + bE[X]$.

Beweis  EBERHARDT-FACHSCHAFT FÜR MATHEMATIK Tübingen



Definition: Die (theoretische) **Varianz** einer diskreten Zufallsvariablen X ist

$$\text{Var}(X) := E[(X - E[X])^2]$$

und ihre **Standardabweichung** ist $\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Es gilt: $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Beweis: 

Beispiele:

- ▶ Wurf eines fairen Würfels

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{k=1}^6 (k - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{(-\frac{5}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2 + \dots + (\frac{5}{2})^2}{6} \\ &= \frac{35}{12} \approx 2,9 \quad \Rightarrow \quad \sigma(X) \approx 1,7\end{aligned}$$

- ▶ $X \sim \text{Bin}(n, p)$: $\text{Var}(X) = np(1 - p)$



- ▶ Stichprobe: $\{x_1, \dots, x_n\}$
- ▶ Betrachte die x_i als unabhängige Zufallsvariablen X_i , die alle gleich verteilt sind, insbesondere

$$E[X_i] = E[X] \quad \text{und} \quad \text{Var}(X_i) = \text{Var}(X) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

- ▶ Dann sind der Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ und

$$\text{die empirische Varianz } s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

erwartungstreu, d.h.

$$E[\bar{x}] = E[X] \quad \text{und} \quad E[s_x^2] = \text{Var}(X).$$

Beweis: 



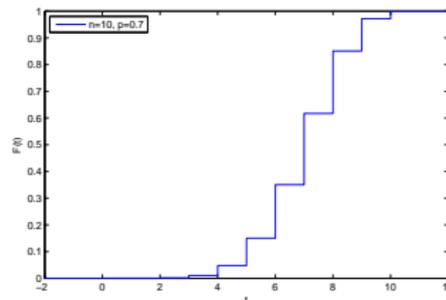
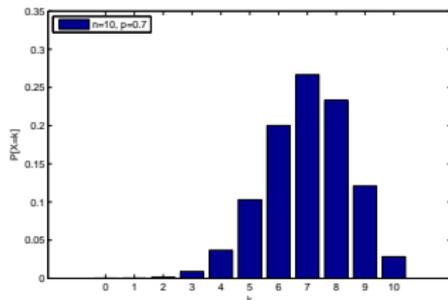
Definition: Die (theoretische kumulative) **Verteilungsfunktion** $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ einer Zufallsvariable X ist gegeben durch

$$F(t) := P[X \leq t]$$

Beispiele:

▶ Wurf eines fairen Würfels 

▶ $X \sim B(10; 0,7)$



Definition: Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt **Poisson-verteilt** mit Parameter $\lambda > 0$ falls

$$P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Man schreibt $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

Eigenschaften: $E[X] = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$

Beispiele:

- ▶ $X = \#$ radioaktive Zerfälle pro Sekunde (für 1kg Plutonium)
- ▶ $X = \#$ Mutationen in festem Zeitraum
- ▶ $X = \#$ Erdbeben in festem Zeitraum

Grund: $\text{Bin}(n, p = \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Pois}(\lambda)$



Beispiel:

- ▶ In Schüttelhausen gibt es im Schnitt 8 Erdbeben pro Jahr.
- ▶ Annahme: Beben zu jeder Zeit gleich wahrscheinlich
- ▶ Wie ist X , die Anzahl der Erdbeben pro Jahr, verteilt?
- ▶ Wir möchten: $E[X] = 8$

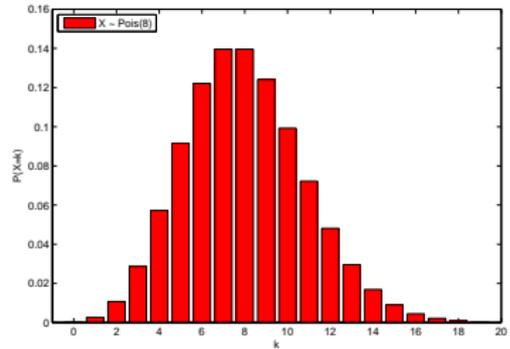
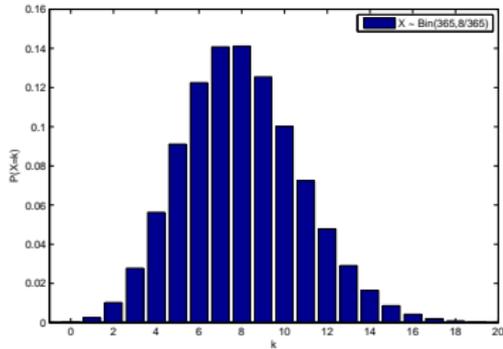
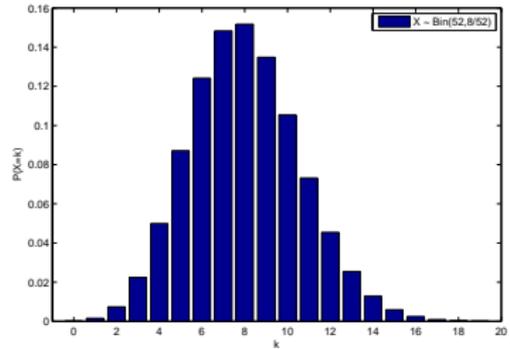
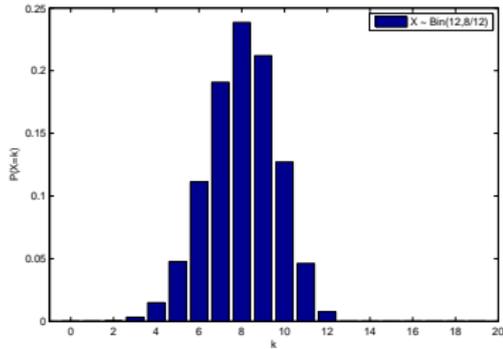
Teile Jahr in gleich große Zeitabschnitte:

Wahrscheinlichkeit für Beben

- ▶ im Januar: $\frac{8}{12}$, im Februar: $\frac{8}{12} \dots \rightsquigarrow X \sim \text{Bin}(12, \frac{8}{12})$
- ▶ in Woche 1: $\frac{8}{52}$, in Woche 2: $\frac{8}{52} \dots \rightsquigarrow X \sim \text{Bin}(52, \frac{8}{52})$
- ▶ am 1. Januar: $\frac{8}{365}$, am 2. Januar: $\frac{8}{365} \dots \rightsquigarrow X \sim \text{Bin}(365, \frac{8}{365})$

...stündlich, minütlich... immer feiner $\rightsquigarrow X \sim \text{Pois}(8)$





Nicht alle Zufallsvariablen sind diskret (“zählen” etwas), manche können beliebige reelle Werte annehmen.

Beispiel: “Wartezeit” in Schüttelhausen 

Definition: Eine Zufallsvariable X heißt **stetig verteilt**, falls eine stetige und diffbare Funktion $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, die **Verteilungsfunktion**, existiert mit

$$P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a).$$

Die Ableitung $f_X := F_X'$ heißt **Dichte** von X

Zusammenhang:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) ds,$$
$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(s) ds = F_X(b) - F_X(a).$$



Beispiel: ...zurück nach Schüttelhausen:

- ▶ $X = \#$ Erdbeben in einem Jahr, $E[X] = 8 =: \lambda$,
also $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, d.h. $P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

gilt auch für andere Zeiträume:

- ▶ $X_1 = \#$ Beben in einem halben Jahr, $E[X] = \frac{\lambda}{2} = 4$
also $X_1 \sim \text{Pois}(\frac{\lambda}{2})$, d.h. $P[X_1 = k] = \frac{(\frac{\lambda}{2})^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{2}}$
- ▶ $X_2 = \#$ Beben in fünf Jahren, $E[X] = 5\lambda$
also $P[X_2 = k] = \frac{(5\lambda)^k}{k!} e^{-5\lambda}$
- ▶ $Y = \#$ Beben in Zeitintervall der Länge t (in Jahren)
 $E[Y] = \lambda t$, also $P[Y = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - e^{-\lambda t}$$

= Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Beben im Zeitraum der Länge t

= Wahrscheinlichkeit dafür, dass Wartezeit T höchstens t

$$= P[T \leq t] = F_T(t) \text{ und damit auch } f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

