

Mathematik II für Biologen
Tests für Erwartungswert & Median

Stefan Keppeler

21. Juni 2013



Prolog

Varianz des Mittelwerts

Beispiel: Waage

Tests für den Erwartungswert

z-Test

t-Test

Tests für den Median

Vorzeichentest

Wilcoxon-Rangsummentest

Vergleich



- ▶ Zufallsvariable X_1, \dots, X_n , iid, d.h. insbesondere

$$E[X_i] = \mu \quad \text{und} \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 \quad \text{für alle } i \text{ gleich}$$
- ▶ $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{\text{ZGS}} \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 
- ▶ **Beispiel** n -faches Würfeln:

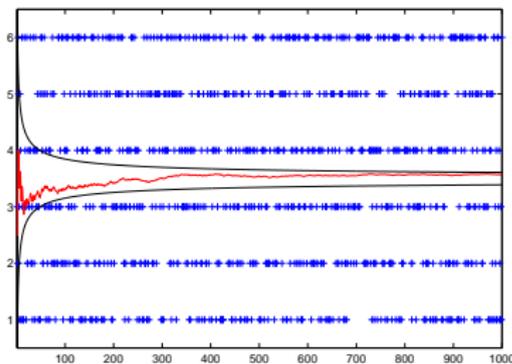
$$\mu = E[X_i] = 3,5 \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X_i) \approx 3$$

$$\Rightarrow P \left[3,5 - 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq 3,5 + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \right] \approx 95\%$$

```

N=1000;
n=1:N;
X=unidrnd(6,1,N);
Xquer=cumsum(X)./n;
plot(n,X,'+')
hold on
plot(n,Xquer,'r')
plot(n,3.5+2*sqrt(3./n),'k')
plot(n,3.5-2*sqrt(3./n),'k')
hold off

```



Beispiel: (vgl. Vorlesung 6: Binomialverteilung & Binomialtest)

- ▶ Die Eichung einer Waage soll überprüft werden.
- ▶ Sollwert 20 kg
- ▶ $n = 10$ Messungen ergeben (in kg):
20,1 20,3 20,9 19,2 20,8 20,1 20,2 20,4 20,2 20,3
- ▶ Damals: Vorzeichentest (verschenkt viel Information)

Fragen:

- ▶ Wo liegen die Messwerte – ist der Erwartungswert oder Median ihrer Verteilung vielleicht 20?
- ▶ Mit welcher Genauigkeit kann man diese Aussage machen?



Betrachte Messungen als Werte von Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n .

Modellannahmen:

- ▶ X_1, \dots, X_n sind iid mit
- ▶ $E[X_i] = \mu$ (**unbekannt**)
- ▶ $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$
(**bekannt** beim z-Test – unrealistisch; später: t-Test)
- ▶ X_1, \dots, X_n sind normalverteilt *oder*
 n ist groß und X_1, \dots, X_n sind nicht zu “unnormal”



z-Test (am Beispiel Waage)

0. Annahme: $\sigma = 0,5$ bekannt

1. $H_0 : \mu = 20$ ("Waage geeicht")

2. $H_A : \mu \neq 20$ ("Waage nicht geeicht")

3. Teststatistik: $Z = \frac{\bar{X} - 20}{0,5/\sqrt{10}}$, wobei $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$

(allg.: $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ für $H_0 : \mu = \mu_0$)

4. Verteilung von Z , falls H_0 stimmt:

$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (zumindest ungefähr)

Begründung:



5. Signifikanzniveau: z.B. $\alpha = 5\%$

6. Verwerfe falls $|Z| \geq 1,96$

(d.h. Verwerfungsbereich $K = (-\infty, -1,96] \cup [1,96, \infty)$)

7. $\bar{X} = 20,25$ d.h. $Z \approx 1,58$ beobachtet

8. Da $1,58 < 1,96$ wird H_0 nicht verworfen



t-Test: Wie z-Test, aber σ wird durch

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

geschätzt.

(vgl. empirische Varianz & Standardabweichung aus Vorlesung 1)

Beachte:

- ▶ s ist Zufallsvariable, und
- ▶ damit hängt Wert von den Daten ab
- ▶ es gilt $E[s^2] = \sigma^2$ (Erwartungstreue, vgl. Vorlesung 7)



t-Test (am Beispiel Waage)

1. $H_0 : \mu = 20$ (“Waage geeicht”)
2. $H_A : \mu \neq 20$ (“Waage nicht geeicht”)

3. Teststatistik: $T = \frac{\bar{X} - 20}{s/\sqrt{10}}$, wobei

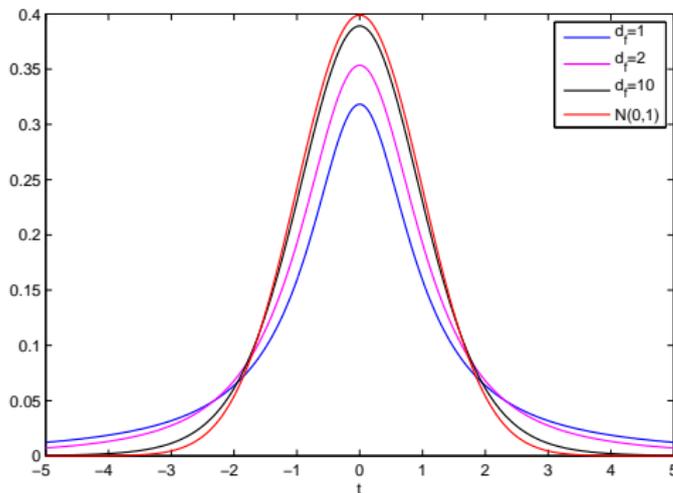
$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \text{ und } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

(allg.: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ für $H_0 : \mu = \mu_0$)

4. Verteilung von T , falls H_0 stimmt, heißt (Studentsche) **t-Verteilung** mit $d_f = n - 1$ Freiheitsgraden.
Tabelliert: Werte $t_{d_f, q}$ mit $P[T \leq t_{d_f, q}] = q$ (Quantile)



Dichte der Studentischen **t-Verteilung**



MATLAB-Code

```
t=-5:0.02:5;  
plot(t,tpdf(t,1),'b')  
hold on  
plot(t,tpdf(t,2),'m')  
plot(t,tpdf(t,10),'k')  
plot(t, normpdf(t,0,1),'r')  
hold off  
legend('d_f=1','d_f=2','d_f=10','N(0,1)');  
xlabel('t')
```



t-Test (am Beispiel Waage, Forts.)

- Signifikanzniveau: z.B. $\alpha = 5\%$
- Verwerfe falls $|T| \geq t_{9;97,5\%} \approx 2,26$
- $\bar{X} = 20,25$, $s \approx 0,46$
 d.h. $T \approx 1,72$ beobachtet
- Da $1,72 < 2,26$ wird H_0 nicht verworfen

außerdem: (zweiseitiges) $(1 - \alpha)$ -Vertrauensintervall für μ

$$\left[\bar{X} - \frac{t_{df,1-\alpha/2} \cdot s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{t_{df,1-\alpha/2} \cdot s}{\sqrt{n}} \right] \approx [19,92, 20,58]$$

Begründung: 

Analog für z-Test:

Ersetze dazu $s \rightarrow \sigma$ und, z.B. für $\alpha = 5\%$, $t_{df,1-\alpha/2} \rightarrow 1,96$.



Tests für den Median

- ▶ **Vorzeichentest:** siehe Vorlesung 6

Annahmen: X_1, \dots, X_n

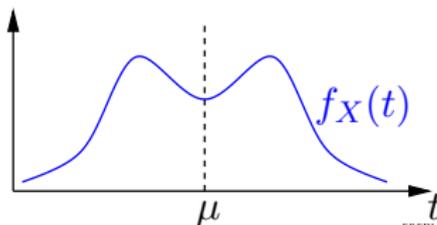
- ▶ unabhängig
- ▶ mit gleichem Median μ .

- ▶ **Wilcoxon-(Rangsummen-)Test**

Annahmen: X_1, \dots, X_n

- ▶ unabhängig
- ▶ mit gleicher Dichte, $f_{X_i} = f_{X_j}$,
- ▶ die symmetrisch um den Median μ ist.

z.B. $X_j \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_j^2)$ oder auch



Wilcoxon-Test (am Beispiel Waage)

1. $H_0 : \mu = 20$ ("Waage geeicht")
2. $H_A : \mu \neq 20$ ("Waage nicht geeicht")
3. & 7. Teststatistik / Berechnung derselben
 - ▶ Bilde Differenzen $d_i = X_i - 20$
 - ▶ Ordne $|d_i|$ aufsteigend und vergebe Ränge $1, \dots, n = 10$
 - ▶ $U^- =$ Summe der Ränge, für die $d_j < 0$
 (oder $U^+ =$ Summe der Ränge, für die $d_j > 0$...egal)

X_i	20,1	20,3	20,9	19,2	20,8	20,1	20,2	20,4	20,2	20,3
d_i	0,1	0,3	0,9	-0,8	0,8	0,1	0,2	0,4	0,2	0,3
Rang($ d_i $)	1,5	5,5	10	8,5	8,5	1,5	3,5	7	3,5	5,5

$$U^- = 8,5 \quad (U^+ = 46,5)$$



- Keine explizite Formel für Verteilung von U^\pm ,
aber: Falls H_0 gilt, sollte $U^- \approx U^+ \approx \frac{n(n+1)}{4} = 27,5$ sein.
Hälfte der Summe der Ränge, da Vorzeichen
der d_i wie durch Münzwurf bestimmt. 
- Signifikanzniveau: z.B. $\alpha = 5\%$
- Verwerfe H_0 , falls $\min(U^-, U^+) \leq 8$
(kritischer Wert tabelliert)
bzw. $K = [0, 8] \cup [47, 55]$
- $U^- = 8,5 \notin K$, also wird H_0 nicht verworfen (*gerade so...*)*

* Übrigens: Mit $19,2 \rightarrow 19,3$ hätte der Wilcoxon-Test bereits verworfen, der t-Test noch nicht.



Wahl des Tests für den Lageparameter (Erwartungswert/Median)

- ▶ $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unabhängig, σ^2 bekannt → z-Test
- ▶ $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unabhängig, σ^2 unbekannt → t-Test
- ▶ X_i unabhängig mit gleicher Dichte, symmetrisch um Median → Wilcoxon-Test
- ▶ X_i unabhängig mit gleichem Median → Vorzeichen-Test

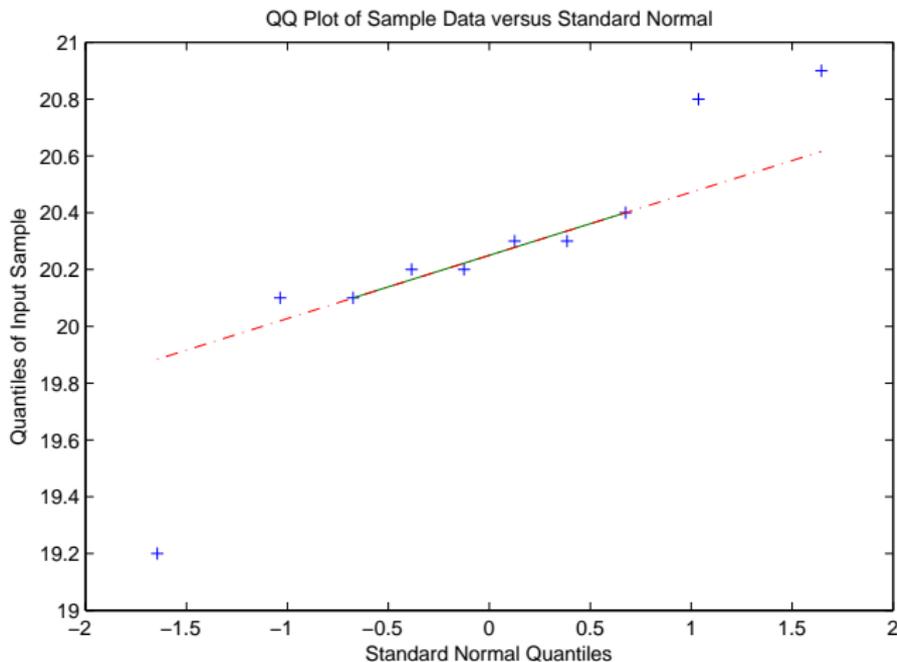
Stärke der
Voraussetzungen

- ▶ Falls Daten tatsächlich normalverteilt, so hat t-Test größte Macht (leicht größer als Wilcoxon)
- ▶ Bei Abweichungen von Normalverteilung hat t-Test oft wesentlich geringere Macht als Wilcoxon (und nie größere)

Konsequenz: Bevorzuge meist Wilcoxon gegenüber t-Test.



Übrigens: QQ-Plot für die Waage-Daten...



...vielleicht nicht so gut normalverteilt.

