Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 09/10

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 4 (Abgabe am 16.11.2008)

Aufgabe 17 (10 Punkte)
Für den funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$ zwischen zwei Größen x und y machen Modell A und Modell B verschiedene Vorhersagen, f_A und f_B, auf der Grundlage von zwei Hypothesen H_A und H_B. Um zwischen H_A und H_B zu entscheiden, führen Sie ein Experiment durch und gewinnen folgende Messwerte für x und y:

x	1.3	1.7	2.0	2.2	2.5
y	0.2518	0.3096	0.3854	0.4083	0.4608
$f_A(x)$	0.2530	0.2917	0.3877	0.4169	0.4625
$f_B(x)$	0.2725	0.3143	0.3806	0.4122	0.4590

Wie Sie sehen, liegt manchmal $f_A(x)$ näher am wahren Wert y und manchmal $f_B(x)$. Um zu beurteilen, welches Modell insgesamt näher an der Wahrheit liegt, betrachten wir die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^5$: $u = \big(y_1, \ldots y_5\big)$, $v_A = \big(f_A(x_1), \ldots, f_A(x_5)\big)$, und $v_B = \big(f_B(x_1), \ldots, f_B(x_5)\big)$, wobei x_i und y_i die Messwerte in der aufgelisteten Reihenfolge sein sollen. Bestimmen Sie die Abstände $d(v_A, u)$ und $d(v_B, u)$ im $\mathbb{R}^5$, die wir als Maß für die Abweichung der Vorhersage von der Wirklichkeit verwenden. Welche Vorhersage ist demnach die genauere?

Aufgabe 18 (10 Punkte)
Bei einer Tierpopulation verhalte sich die Geburtenrate g (Anzahl Geburten pro Jahr pro Populationsgröße) in Abhängigkeit von der Populationsdichte d (Anzahl Individuen pro Fläche) gemäß $g = 0{,}5 + 0{,}2d$, die Sterberate s gemäß $s = 0{,}3 + 0{,}4d$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch: Für welche d schrumpft die Population, für welche wächst sie, für welche bleibt sie konstant?

Aufgabe 19 (10 Punkte)
Wenn sich etwa 10^8 *E. coli*-Bakterien in der Niere eines Menschen befinden, können Sie eine Nierenbeckenentzündung auslösen. Zur Zeit $t = 0$ seien 50 000 *E. coli*-Bakterien in eine Niere gelangt. Hier vermehren sie sich so schnell, dass sich ihre Anzahl alle 20 Minuten verdoppelt (Absterbe- oder Ausscheidungsprozesse seinen bereits eingeschlossen). Sei t die Zeit (in Stunden gemessen) und $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit t.

a) Welchen Wert hat $\dfrac{N(t+1)}{N(t)}$, d.h. um welchen Faktor wächst die Anzahl innerhalb einer Stunde?

b) Geben Sie $N(t)$ als Funktion der Form $N(t) = C \cdot \alpha^t$ an.

c) Können die Bakterien bereits nach 3 Stunden eine Nierenbeckenentzündung auslösen? Wie sieht es nach 4 Stunden aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 20 (10 Punkte)

In einem See nimmt die Licht-Intensität pro 1m Wassertiefe um 7% ab. Sei $I(x)$ die Intensität in x Metern Tiefe.

a) Was bedeutet $I(0)$ in Worten?

b) Geben Sie eine Formel für $I(x)$ an. Diese darf den nicht weiter spezifizierten Wert $I(0)$ enthalten.

c) Zeichnen Sie die Funktion $\frac{I(x)}{I(0)}$ für $x \in [0, 12]$ (von Hand oder mit MATLAB).

d) In welcher Tiefe sind noch ungefähr 50% der Ausgangsintensität übrig?
Lesen Sie den gesuchten Wert z.B. aus Ihrem Diagramm aus Teil (b) ab.

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Plotten Sie die Funktionen $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, 2, 4$ in dasselbe Diagramm mit $x \in [0, 1.2]$. Verweden Sie dabei für die Funktionen mit $\alpha < 1$ gestrichelte Linien und für die mit $\alpha \geq 1$ durchgezogene.

Beispiel 5: Für einen Datenvektor `x` zeichnet

```
» plot(x,sin(x),'-')
» hold on
» plot(x,cos(x),'--')
» hold off
```

$\sin x$ und $\cos x$ in dasselbe Diagramm.

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte (x, y) in der Ebene, die von einem gegebenen Punkt (u, v) den gleichen Abstand r haben. Die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9\} \qquad (*)$$

beschreibt also eine Kreislinie und

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y+2)^2 < 9\}$$

das Innere dieses Kreises.

a) Was ist der Mittelpunkt des Kreises?

b) Was ist sein Radius?

HINWEIS: Denken Sie an die Definition des euklidischen Abstands aus Vorlsung 2.

Wenn wir Gleichung $(*)$ nach y auflösen, erhalten wir zwei Lösungen. Diese stellen Funktionen $f_{1,2}(x)$ dar, deren Graphen gemeinsam die Kreislinie bilden.

c) Was ist der Definitionsbereich der beiden Funktionen?
HINWEIS: Unter der Wurzel sollten keine negativen Zahlen auftreten.

d) Zeichnen Sie nun den Kreis $(*)$ mit MATLAB.
HINWEIS: Denken Sie an den Befehle `hold on` und `hold off` aus Beispiel 5.