Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 09/10

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 6 (Abgabe am 30.11.2009)

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Wir simulieren $N = 1000$ radioaktive Atome und nehmen an, dass jedes Atom mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 3{,}7\,\% = 0{,}037$ innerhalb einer Sekunde zerfällt. Für diese Simulation erzeugen wir eine Zufallszahl[3] $X \in [0, 1]$. Gilt $X \leq 0{,}037$, so soll das simulierte Atom zerfallen, sonst nicht. Das Verfahren wiederholen wir in einer Funktion[4] `decay` so oft, bis das Atom zerfallen ist, und generieren so die zufällige Anzahl Sekunden t bis zum Zerfall. Führen Sie dies für $N = 1000$ Atome durch und plotten Sie in ein Histogramm, wie viele Atome wann zerfallen sind.

```
N=1000;
Atome=zeros(1,N);
for n=1:N
    Atome(n)=decay();
end
hist(Atome,max(Atome)); % Lesen Sie sich die Hilfe zu hist durch,
                        % und spielen Sie etwas damit...
```

Plotten Sie zum Vergleich die (zufalls-unabhängige) Anzahl der zu erwartenden Zerfälle im Zeitintervall $[t, t+1]$

$$Z(t) = Z(0)\exp(-\lambda t)$$

mit $Z(0) = pN$ (warum?); bestimmen Sie dazu zunächst λ aus

$$\exp(-\lambda \cdot 1\ \mathrm{sec}) = 1 - p \quad \text{(warum?)}\,.$$

Bemerkung: $Z(t)$ beschreibt den Zerfallsprozess umso besser, je größer N ist. Probieren Sie doch auch mal $N = 100$ und $N = 10\,000$.

[3] *Beispiel 7:* (Erzeugung von Zufallszahlen)
Der Befehl `A=rand(N)` erzeugt eine $N \times N$-Matrix `A` (ein Zahlenschema aus N Zeilen und N Spalten) mit Zufallswerten $A_{ij} \in [0, 1)$. Für unsere Zwecke genügt es, jeweils *eine* Zufallszahl X zu berechnen, also
```
» X=rand(1)
```

[4] Legen Sie eine Datei mit dem Namen `decay.m` mit dem folgenden Inhalt an (vgl. Beispiel 4).

```
function zeit=decay()
    zeit=1;
    X=rand(1);
    while(X>0.037)   % while(...) durchläuft die folgenden Anweisungen
      zeit=zeit+1;   % solange die Bedingung in der Klammer erfüllt ist.
      X=rand(1);
    end
end
```

Probieren Sie ein paar Mal im Command Window aus, was passiert, wenn man `decay()` eingibt.

Aufgabe 29 (Fehlerrechnung zur Radiokarbon-Methode) (10 Punkte)

a) Bei einer Probe von 4,5 Gramm Kohlenstoff messen Sie 43 ± 4 Zerfälle pro Minute. Um festzustellen, wie sich die Mess-Ungenauigkeit auf die Ungenauigkeit des Altersschätzers auswirkt, bestimmen Sie, wie in Aufgabe 25, einmal den Altersschätzer $A(39)$ für 39 Zerfälle pro Minute und einmal den Altersschätzer $A(47)$ für 47 Zerfälle pro Minute. Beweisen Sie, dass für jede Zerfallsrate Z zwischen 39 und 47 der Altersschätzer $A(Z)$ zwischen $A(39)$ und $A(47)$ liegt.

b) Nehmen Sie nun an, dass Sie auch die Masse m der Probe nicht exakt bestimmen konnten, sondern nur als $4{,}5 \pm 0{,}3$ Gramm. Wie lautet nun, bei zwei Fehlerquellen, das Intervall, in dem die Altersschätzer $A(Z, m)$ liegen können (mit Erklärung)?

Aufgabe 30 (10 Punkte)

a) Beim *goldenen Schnitt* teilt man eine Strecke so in zwei Teilstrecken, dass das Verhältnis des kleineren Teils zum größeren gleich dem Verhältnis des größeren Teils zur Gesamtstrecke ist. Berechnen Sie dieses Verhältnis (ungerundet!).

b) Ein Schiff rage 27 m aus dem Wasser. Sie stehen auf einem Stein am Ufer des Meeres, so dass sich Ihre Augen in 2,10 m Höhe befinden. Am Horizont erkennen Sie die obere Hälfte des Schiffes. Wie weit ist das Schiff von Ihnen entfernt?

c) Da das menschliche Auge aus einzelnen Sehzellen besteht, sieht man tatsächlich alles "gepixelt" mit einer maximalen Auflösung (Pixelgröße) von einer halben Bogenminute. Mit welcher Auflösung ($n \times m$ Pixel) sehen Sie eine Tafel, die 3 m hoch und 6 m breit ist, wenn Sie mittig vor ihr im Abstand von 10 m sitzen?

Aufgabe 31 (10 Punkte)

Ein Vogel fliegt 10 min lang mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s über Grund nach Westen. Danach fliegt er 5min lang nach Südwesten. Während der gesamten Zeit weht ein konstanter Wind mit 3 m/s aus Südosten. Gegenüber der ihn umgebenden Luft bewegt sich der Vogel die ganze Zeit mit der gleichen Geschwindigkeit.

a) Wie schnell bewegt sich der Vogel gegenüber der ihn umgebenden Luft?

b) Mit welcher Geschwindigkeit (über Grund) fliegt der Vogel Richtung Südwesten?

c) Wieviel m südlich und wieviel m westlich vom Ausgangsort befindet sich der Vogel nach der Gesamtflugzeit von 15min?

Hinweise: Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ die Vektoren der Fluggeschwindigkeit (über Grund) auf den beiden Teilstücken, mit $\vec{w}$ den Vektor der Windgeschwindigkeit sowie mit $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ die Geschwindigkeitsvektoren gegenüber der umgebenden Luft (alles in m/s); zu a: Geben Sie $\vec{v}_1$ und $\vec{w}$ an und bestimmen Sie daraus zunächst $\vec{u}_1$ und dann $|\vec{u}_1|$; zu b: Es gilt $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$ (warum?) und $\vec{v}_2 = \frac{|\vec{v}_2|}{\sqrt{2}} \binom{-1}{-1}$ (warum?).