

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Koordinaten, Funktionen & Etwas Geometrie

Stefan Keppeler

26. Oktober 2009

Kartesische Koordinaten

Ebene \mathbb{R}^2 und Raum \mathbb{R}^3

Allgemein: \mathbb{R}^n

Punktmengen in der Ebene

Graphen von Funktionen

Geometrische Operationen in der Ebene

Euklidischer Abstand

... im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

... im \mathbb{R}^n

Umfang, Flächeninhalt & Volumen

Umfang und Flächeninhalt

Oberfläche und Volumen

Skalierungsverhalten

Bären (Bergmannsche Regel)

Anhang

- ▶ Punkte in der Ebene \mathbb{R}^2 :
Angabe eines Paares von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2) \quad \text{wobei} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$



- ▶ Punkte im Raum \mathbb{R}^3 :
Angabe eines Tripels von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2, x_3) \quad \text{wobei} \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$



- Allgemein (zunächst abstrakt): Punkte im \mathbb{R}^n :
Angabe eines n -Tupels von reellen Zahlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{wobei} \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Beispiel: Betrachte z.B. die Ergebnisse von 7 Temperaturmessungen an aufeinanderfolgenden Tagen als Punkt im \mathbb{R}^7 .

Bereiche oder “Figuren” in der Ebene

entsprechen (in Koordinaten)

Teil Mengen des \mathbb{R}^2 .

Umgekehrt können wir Teil Mengen des \mathbb{R}^2 graphisch darstellen.



- ▶ **Funktion** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
z.B. $f_1 : x \mapsto x$ oder $f_2 : x \mapsto 1 - x^2$
(kurz: $f_1(x) = x$ bzw. $f_2(x) = 1 - x^2$)
- ▶ **Graph** der Funktion $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$
ist Figur in der Ebene



- ▶ allgemein: $f : D \rightarrow W$ wobei

D : **Definitionsbereich**

W : Wertebereich

oben: $D = W = \mathbb{R}$ andere Beispiele:

- ▶ Temperatur $T(x, y, z)$ (in $^{\circ}\text{C}$) an jedem Punkt (x, y, z) des Raumes, d.h. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
- ▶ oder, der Raum ist nur endlich groß (sagen wir quaderförmig),
 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$,
dann wäre $T : D \rightarrow \mathbb{R}$

Geometrische Operationen in der Ebene entsprechen algebraischen Operationen mit den Koordinaten, z.B.

Translation (Verschiebung)	$(x, y) \mapsto (x + u, y + v)$
zentrische Streckung (Vergrößerung)	$(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$, $\alpha > 1$
Streckung in x -Richtung	$(x, y) \mapsto (\alpha x, y)$, $\alpha > 1$
Streckung in y -Richtung	$(x, y) \mapsto (x, \alpha y)$, $\alpha > 1$
Spiegelung an der x -Achse	$(x, y) \mapsto (x, -y)$
Spiegelung an der y -Achse	$(x, y) \mapsto (-x, y)$
Punktspiegelung im Ursprung	$(x, y) \mapsto (-x, -y)$

Alle Operationen sind Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. 

Wie wirkt sich Operation auf Funktionsgraph aus? 

Abstand d zweier Punkte $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

- ▶ Hilfspunkt (u_1, v_2) ... rechtwinkliges Dreieck
- ▶ **Satz des Pythagoras** liefert



$$d(u, v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2},$$

definiert Abstandsfunktion $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Analog im \mathbb{R}^3

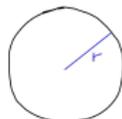
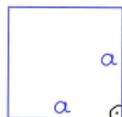
- ▶ Raumdiagonale
- ▶ $2 \times$ Pythagoras 

$$d(u, v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2},$$

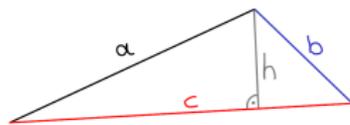
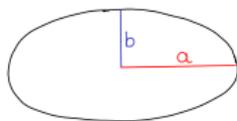
d.h. $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto d(u, v)$.

Entsprechend **definiert** man den Abstand zweier Punkte $u, v \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned}d(u, v) &:= \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - u_i)^2} \\ &= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2}\end{aligned}$$

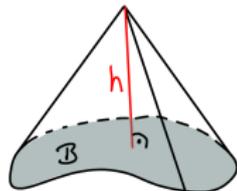
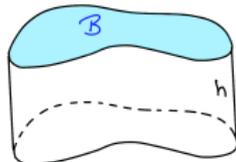
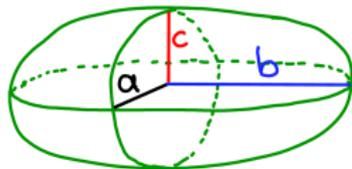


Form	Umfang	Flächeninhalt
Quadrat	$4a$	a^2
Rechteck	$2a + 2b$	ab
Kreis	$2\pi r$	πr^2
Ellipse	keine einfache Formel	πab
Dreieck	$a + b + c$	$\frac{1}{2}ch$





Form	Oberfläche	Volumen (Rauminhalt)
Würfel	$6a^2$	a^3
Quader	$2ab + 2bc + 2ac$	abc
Kugel	$4\pi r^2$	$\frac{4\pi}{3}r^3$
Ellipsoid	keine einfache Formel	$\frac{4\pi}{3}abc$
Prisma, Zylinder	$hU + 2B$	hB
Kegel, Pyramide	keine allgemeine Formel	$\frac{1}{3}hB$



Beobachtung: Bei einer zentrischen Streckung um einen Faktor $\alpha > 0$ (d.h. $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$ im \mathbb{R}^2 , bzw. $(x, y, z) \mapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ im \mathbb{R}^3) gilt bei allen Objekten

- ▶ Weglängen (z.B. Umfang) wachsen¹ um Faktor α
- ▶ Flächen wachsen um Faktor α^2
- ▶ Volumina wachsen um Faktor α^3

Dies ist formunabhängig!

Anwendung: Bergmannsche Regel
Innerhalb einer Verwandtschaftsreihe sind warmblütige Tiere im kalten Klima großwüchsig.

Erklärung: 

¹bzw. schrumpfen für $0 < \alpha < 1$

Eisbär



♀ 1,90m–2,10m
♂ 2,40m–2,60m



Kragenbär



1,20m–1,80m



Großer Panda



1,20m–1,50m



- **Kreis** mit Radius $r > 0$ um Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^2$

$$K_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, v) = r\}$$

- analog die **Kreisscheibe** (Radius $r > 0$, Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^2$)

$$I_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, v) \leq r\}$$

- $K_r(u)$ ist **Lösungsmenge** der Gleichung

$$d(u, v) = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 = r^2$$

(quadratische Gleichung)



- Betrachte nun v_1 als gegeben und suche f so, dass $v_2 = f(v_1)$, d.h. löse nach v_2 auf:



$$v_2 = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2}, \quad |v_1 - u_1| \leq r$$

- Damit ist $K_r(u)$ Vereinigung der Graphen von f_+ und f_- ,

$$f_{\pm}(v_1) = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2},$$

beide mit Definitionsbereich

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - u_1| \leq r\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid u_1 - r \leq x \leq u_1 + r\} \\ &= [u_1 - r, u_1 + r] \end{aligned}$$



Kugel mit Radius $r > 0$ um Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^3$

- ▶ Kugeloberfläche (**Sphäre**, engl. *sphere*)

$$S_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid d(u, v) = r\}$$

- ▶ **Vollkugel** (engl. *ball*)

$$B_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid d(u, v) \leq r\}$$

Sphäre als Funktionsgraph?

- ▶ Sphäre ist Lösungsmenge von

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 = r^2$$

... auflösen nach v_3



- ... auflösen nach v_3

$$v_3 = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}, \quad (v_1, v_2) \in I_r(u_1, u_2)$$

... zwei Funktionen

$$f_{\pm}(v_1, v_2) = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}$$

mit Definitionsbereich $D = I_r(u_1, u_2)$.

- Damit ist $S_r(u)$ Vereinigung der Graphen

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f_+(x, y), (x, y) \in I_r(u_1, u_2)\}$$

und $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f_-(x, y), (x, y) \in I_r(u_1, u_2)\}$



Zahlenmengen

- ▶ \mathbb{N} die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$,
- ▶ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen inkl. der Null,
- ▶ $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die ganzen Zahlen,
- ▶ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
die rationalen Zahlen – Brüche bzw. Zahlen mit endlicher oder periodischer Dezimalbruchentwicklung,
- ▶ \mathbb{R} die reellen Zahlen – enthalten zusätzlich zu \mathbb{Q} Zahlen wie $\sqrt{2} \approx 1,414\dots$, $\pi \approx 3,141\dots$ oder $e \approx 2,718\dots$, die nicht als Bruch geschrieben werden können.

Bemerkung: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$