

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen  
Mehr über den Logarithmus

Stefan Keppeler

16. November 2009

## Wiederholung

Definition des Logarithmus

## Anwendungen

Beispiel: Halbwertszeit

Logarithmische Skalenteilung

## Andere Basen

Beispiel: pH-Wert

- ▶ Der **Logarithmus** ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h.

$$y = \log x$$

ist die eindeutige Lösung der Gleichung  $e^y = x$  zu gegebenem  $x > 0$ .

- ▶ Es gilt also  $\log(e^x) = e^{\log x} = x$  für  $x > 0$ .
- ▶ Damit folgen Rechenregeln für den Logarithmus aus den Potenzrechenregeln
- ▶ **Notation:**  
Manchmal schreibt man auch  $\ln$  (*Logarithmus naturalis*) statt  $\log$  – wir schreiben  $\log$ .



**Beispiel:** Die **Halbwertszeit**  $t_{1/2}$  einer radioaktiven Substanz ist die Zeit, in der die Aktivität (Anzahl Zerfälle pro Minute) oder auch die vorhandene Menge auf die Hälfte zurückgeht, also

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}.$$



Zusammenhang zwischen  $t_{1/2}$  und dem Zerfallsparameter  $\lambda$ :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

oder

$$\lambda = \frac{\log 2}{t_{\frac{1}{2}}},$$

denn





## Andere Basen

- ▶ Für  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$  besitzt auch die Gleichung  $\alpha^y = x$
- ▶ mit gegebenem  $x > 0$
- ▶ eine eindeutige Lösung  $y = \log_\alpha x$ , genannt **Logarithmus von  $x$  zur Basis  $\alpha$** .

**Bemerkung:** Damit gilt  $\log = \log_e$ .

**Beliebte Basen** außer  $e$  sind

- ▶ 2 (“binärer Logarithmus”, **lb**) und
- ▶ 10 (“dekadischer Logarithmus”, **lg**).

Aus den Potenzrechenregeln folgt

$$\log_\alpha x = \frac{\log(x)}{\log(\alpha)}.$$



Der **pH-Wert** (lat. *pondus Hydrogenii* = Gewicht des Wasserstoffs) ist ein Maß für die Säure einer Flüssigkeit und gibt die Konzentration der Wasserstoff-Ionen logarithmisch an,

$$\text{pH} = -\log_{10}(\rho).$$

Hierbei ist  $\rho$ , grob gesagt,<sup>1</sup> die Konzentration der Protonen  $H^+$ .

- ▶ Wein ( $\text{pH} \approx 4$ ) hat also die 1000-fache Protonenkonzentration von Wasser ( $\text{pH} = 7$ ),
- ▶ Seife ( $9 \leq \text{pH} \leq 10$ ) entsprechend  $\frac{1}{100}$  bis  $\frac{1}{1000}$  der  $H_3O^+$ -Konzentration von Wasser.

---

<sup>1</sup>genauer gesagt, der Quotient aus der Aktivität der Oxoniumionen  $H_3O^+$  zur Aktivität von  $H_2O$

