

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Vektorrechnung

Stefan Keppeler

23. November 2009

Vektoren


Definition & Notation
Betrag & Summe

Beispiele

Addition von Kräften

Rechenregeln


Addition
Skalare Multiplikation
Skalarprodukt

- ▶ Vektoren werden zur Darstellung **gerichteter Größen** verwendet.
- ▶ Man stelle sich also einen Pfeil in eine bestimmte **Richtung** mit einer bestimmten Länge (**Betrag**) vor. 

Zum Rechnen:

Darstellung durch Komponenten in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad u_i \in \mathbb{R} \quad (\text{Spaltenvektor})$$

...oder Zeilenvektor: $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 

Notation: Oft auch \mathbf{u} statt \vec{u} oder einfach u für Vektoren im \mathbb{R}^n

Definition: Der **Betrag** oder die **Norm** eines Vektors $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ist



$$|\vec{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}. \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="658 288 709 354"/>$$

(stimmt überein mit dem Abstand des Punktes mit Koordinaten u_1, u_2, \dots, u_n vom Ursprung.)

Definition: Die **Summe** zweier Vektoren $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ und $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ im \mathbb{R}^n ist komponentenweise erklärt,

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

Geometrische Bedeutung: **Parallelogrammaddition** 


- ▶ **Geschwindigkeiten** addieren sich vektoriell, z.B. gehende Person auf Schiff. 
- ▶ **Translationen** addieren sich vektoriell, z.B. Fahrt von Tübingen nach Ulm, via Stuttgart 
- ▶ Mittelung von **Richtungen**:
Himmelsrichtung in die ein Zugvogel morgens losfliegt, repräsentiert durch einen Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{u}| = 1$.
Mittelung der Winkel? Oder über Vektoraddition?

$$\vec{u} = \frac{1}{N} (\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_N)$$




- **Addition von Kräften:** Elektrisch geladene Teilchen (z.B. Elektronen, Ionen, Staubkörner), nummeriert von 1 bis N .
 - Kraft auf Teilchen Nr. i :

$$\vec{K}_i = \sum_{j=1}^N \vec{K}_{ij} \quad (\text{Vektorsumme})$$

\vec{K}_{ij} : Kraft, die Teilchen Nr. j auf Teilchen Nr. i ausübt (elektrostatische Anziehungs- oder Abstoßungskraft). 

- \vec{K}_{ij} zeigt nach **Coulombschen Gesetz** in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Teilchen i und j ; Betrag

$$|\vec{K}_{ij}| = \frac{q_i q_j}{d(\vec{x}_i, \vec{x}_j)^2}, \quad d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|,$$

wobei $q_i \in \mathbb{R}$ die Ladung und $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$ die Position von Teilchen i ist. 



Rechenregeln: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (Vektoren)

- ▶ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Kommutativität)
- ▶ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (Assoziativität)
- ▶ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall \vec{u}$, wobei $\vec{0} = (0, \dots, 0)$
(Existenz eines neutralen Elements, "Nullvektor")
- ▶ $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ wobei $-\vec{u} = (-u_1, \dots, -u_n)$
(Existenz des additiv-inversen, "das Negative von \vec{u} ")

Beispiele:

- ▶ Das Negative $-\vec{u}$ eines Geschwindigkeitsvektors entspricht der Bewegung in die entgegengesetzte Richtung mit (betragsmäßig) gleicher Geschwindigkeit.
- ▶ Eine Punktspiegelung am Ursprung bildet jeden Vektor auf sein Negatives ab.



Definition: Das α -fache eines Vektors $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert als der Vektor

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n).$$

Die so definierte Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Skalarmultiplikation**.

Beispiele:

- ▶ Zentrische Streckung um Faktor $\alpha > 0$ bildet jeden Punkt/Vektor auf sein α -faches ab.
- ▶ Kraft = Masse \cdot Beschleunigung.
- ▶ $\vec{u} \neq \vec{0}$ und $\alpha\vec{u}$ für $\alpha > 0$ zeigen in dieselbe Richtung, $\vec{u} \parallel \alpha\vec{u}$.
- ▶ Falls $\vec{u} \parallel \vec{v}$, dann $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \alpha\vec{u}$
- ▶ Richtung von $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, gegeben durch **Einheitsvektor**

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

(gleiche Richtung wie \vec{u} aber Betrag 1)



Rechenregeln: $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (Vektoren), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Skalare)

- ▶ $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- ▶ $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (zwei Distributivgesetze)
- ▶ $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$ (Assoziativität)
- ▶ $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (neutrales Element der Multiplikation)
- ▶ $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- ▶ $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Beachte: Man multipliziert hier einen Vektor mit einem Skalar, nicht mit einem anderen Vektor! Man kann durch einen Skalar $\alpha \neq 0$ dividieren (indem man mit α^{-1} multipliziert), aber man kann nicht durch einen Vektor dividieren!

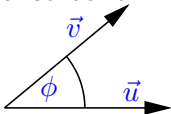
Definition: Das (kanonische) **Skalarprodukt** ist eine Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

Beispiel:



- ▶ offensichtlich gilt $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- ▶ **Rechenregeln:** $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (Vektoren), $\alpha \in \mathbb{R}$ (Skalar)
 - ▶ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
 - ▶ $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
 - ▶ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ▶ anschaulich: Winkel zwischen \vec{u} und \vec{v}



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \phi$$

