

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen  
**Matrizen**

Stefan Keppeler

30 November 2009

## Matrizen

Definition, Summe & Produkt  
Transponierte

## Markow-Prozesse

Beispiel: Einwohnerzahlen  
Leslie-Populationsmodell  
Beispiel

## Rechenregeln

Addition  
Multiplikation  
Inverse  
Addition & Multiplikation  
Anwendung der Assoziativität  
Potenzen

**Definition:** Eine  $n \times m$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  ist ein Rechteck-Schema aus Zahlen  $a_{ij}$  in  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Die Menge aller  $n \times m$ -Matrizen bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}(n, m)$ .

Die **Summe**  $A + B$  zweier  $n \times m$ -Matrizen  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$  ist die  $n \times m$ -Matrix mit den Einträgen  $a_{ij} + b_{ij}$ .

Das **Produkt**  $AB$  einer  $n \times m$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit einer  $m \times \ell$ -Matrix  $B = (b_{rs})$  ist die  $n \times \ell$ -Matrix  $C = (c_{is})$  mit den Einträgen (Komponenten)

$$c_{is} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{js}.$$

**Definition:** Die **Transponierte**  $A^T$  einer  $n \times m$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  ist die  $m \times n$ -Matrix mit den Einträgen  $a_{ji}$ .

$A$  heißt **symmetrisch**, wenn  $A^T = A$ .



**Bemerkung:** Vektoren lassen sich als Matrizen auffassen; man muss sich nur festlegen, ob sie

Spaltenvektoren (und damit  $n \times 1$ -Matrizen) oder  
Zeilenvektoren (und damit  $1 \times n$ -Matrizen) sind.

Sei  $A \in \mathcal{M}(n, m)$  und  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ , aufgefasst als Spaltenvektor  $\vec{x} \in \mathcal{M}(m, 1)$ . Dann ist

$A\vec{x} \in \mathcal{M}(n, 1)$  ein Spaltenvektor,



für den wir einfach schreiben  $A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , genannt “ $A$  angewandt auf den Vektor  $\vec{x}$ ”.



## Anwendung: Markov-Prozess in diskreter Zeit

- ▶ Individuum einer Gesamtheit im Zustand  $j$   
→ Zeitschritt →  
Wahrscheinlichkeit  $w_{ij}$ , für Übergang in den Zustand  $i$
- ▶  $n$  mögliche Zustände: Zahlen  $w_{ij} \in [0, 1]$  bilden  $n \times n$ -Matrix, die **Übergangsmatrix**  $W$  des Markov-Prozesses.
- ▶ Zeitpunkt  $t = 0$ :  $N_j^{(0)}$  Individuen im Zustand  $j$   
**Populationsvektor**:  $N^{(0)} = (N_1^{(0)}, \dots, N_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Zeitpunkt  $t = 1$ : näherungsweise für große  $N_j^{(0)}$

$$N_j^{(1)} = w_{j1}N_1^{(0)} + w_{j2}N_2^{(0)} + \dots + w_{jn}N_n^{(0)}$$

kurz

$$N^{(t+1)} = WN^{(t)}.$$

**Beispiel:** Tübingen hat 84.000 Einwohner, Reutlingen 112.000. Wenn jedes Jahr 5% der Einwohner Tübingens nach Reutlingen umzögen und 10% der Einwohner Reutlingens nach Tübingen (keine sonstigen Umzüge, keine Geburten oder Todesfälle), gilt

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 84.000 \\ 112.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.000 \\ 105.000 \end{pmatrix} \cdot \img alt="pencil icon" data-bbox="875 388 924 455"/>$$

Folgejahr (gleiche Übergangswahrscheinlichkeiten):

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 91.000 \\ 105.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96.950 \\ 99.050 \end{pmatrix} \cdot$$

**Gleichgewichtslage** oder **stationäre Verteilung** falls  $WN = N$ , d.h. gleich viele Umzüge in jeder Richtung:

$$0,05 N_1 = 0,1 N_2 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2N_2$$

Wegen  $N_1 + N_2 = 196.000$ , folgt  $N_1 = 130.667$  und  $N_2 = 65.333$ .

→ MATLAB



## Anwendung: Leslie-Populationsmodell

- ▶ Jedes Individuum einer Gesamtheit befindet sich zu einem Zeitpunkt in einem von  $n$  Zuständen.
- ▶ Ein Individuum im Zustand  $j$  erzeugt im Mittel  $l_{ij}$  Individuen im nächsten Schritt im Zustand  $i$ ; diese Werte bilden die Leslie-Matrix  $L = (l_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n)$ .
- ▶  $N^{(t)} = (N_1^{(t)}, \dots, N_n^{(t)})$ : Populationsvektor zur Zeit  $t$ , dann ist im Mittel (und für große Besetzungszahlen näherungsweise)

$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}.$$

**Beispiel:** Fibonacci-Hasen (vgl. Vorlesung 3)



## Beispiel:

- ▶ Gesamtheit = Population
- ▶ Zustand  $i$  = Alter in Jahren  $\in \{0, \dots, n\}$
- ▶ Individuum von  $i$  Jahren setzt im Mittel  $\nu_i$  Nachkommen (vom Alter 0) in die Welt und geht selbst in den Zustand  $i + 1$  über – wenn es nicht stirbt.
- ▶ Ein Individuum von  $j$  Jahren überlebt noch mindestens ein Jahr mit Wahrscheinlichkeit  $s_j \in [0, 1]$ ,  $s_n = 0$ .

Also

$$N_0^{(t+1)} = \sum_{j=0}^n \nu_j N_j^{(t)}$$

und

$$N_i^{(t+1)} = s_{i-1} N_{i-1}^{(t)}$$

für  $1 \leq i \leq n$ .

$$L = \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$





**Rechenregeln Addition:** Seien  $A, B, C \in \mathcal{M}(n, m)$ . Dann gilt

- ▶  $A + B = B + A$  (Kommutativität)
- ▶  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (Assoziativität)
- ▶  $A + 0 = A$  mit der “Nullmatrix”  $0$ ,  
die als Einträge lauter Nullen hat  
(neutrales Element der Addition)
- ▶  $A + (-A) = 0$  mit  $-A = (-a_{ij})$   
(Existenz von additiv-inversen [negativen] Elementen).

## Rechenregeln Multiplikation:

Seien  $A \in \mathcal{M}(n, m)$ ,  $B \in \mathcal{M}(m, \ell)$  und  $C \in \mathcal{M}(\ell, k)$ .

- ▶ Kommutativität gilt i.A. nicht! (Beispiel Übungsaufgabe), d.h. i.A.  $AB \neq BA$
- ▶  $(AB)C = A(BC)$  (Assoziativität)
- ▶  $A0 = 0 = 0A$
- ▶  $AI = A = IA$  mit der **Einheitsmatrix**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

( $I$  = neutrales Element der Multiplikation).

Einträge mit dem **Kronecker-Symbol**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

also  $I = (\delta_{ij})$ .




- Für manche, aber nicht für alle  $A \in \mathcal{M}(n, n)$  mit  $A \neq 0$  existiert eine **inverse Matrix**  $A^{-1}$  mit der Eigenschaft


$$A^{-1}A = I = AA^{-1}.$$

Solche  $A$  heißen **invertierbar**.

- Ist  $A$  invertierbar, dann ist die Inverse eindeutig, d.h., wenn  $B, C \in \mathcal{M}(n, n)$  mit

$$BA = I = AB \quad \text{und} \quad CA = I = AC$$

dann folgt  $B = C$ . 

- Ein Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix  $A \neq 0$  ist die Matrix aus der Übungsaufgabe mit  $A^2 = 0$ . 

## Rechenregeln Addition und Multiplikation:

▶  $(A + B)C = AC + BC$

für  $A, B \in \mathcal{M}(n, m)$  und  $C \in \mathcal{M}(m, \ell)$ ,

▶  $A(B + C) = AB + AC$

für  $A \in \mathcal{M}(n, m)$  und  $B, C \in \mathcal{M}(m, \ell)$ . (Distributivgesetze)

▶  $A(-B) = (-A)B = -(AB)$ .

## Anwendung der Assoziativität: Aus

$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}$$

für Markow-Prozesse und Leslie-Modelle folgt

$$\begin{aligned} N^{(t)} &= L(L(L(\dots(LN^{(0)})\dots))) \\ &= (\dots((LL)L)\dots)LN^{(0)} = L^t N^{(0)}, \end{aligned}$$

wobei Potenzen von Matrizen  $L^t = LLL \cdots L$  (mit  $t$  Faktoren) nur für  $L \in \mathcal{M}(n, n)$  und i.A. nur für Exponenten  $t \in \mathbb{N}_0$  definiert sind – bei invertierbaren Matrizen auch für  $t \in \mathbb{Z}$ .

## Potenzrechenregeln:

- ▶  $A^n A^m = A^{n+m}$
- ▶  $A^1 = A$
- ▶  $A^0 = I$  für  $A \neq 0$
- ▶  $(A^n)^m = A^{nm}$

**Vorsicht:** i.A.  $(AB)^n \neq A^n B^n$ , denn z.B.

$$(AB)^2 = ABAB \neq AABB = A^2 B^2.$$