Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Konvergenz und Stetigkeit

Stefan Keppeler

14. Dezember 2009

Eberhard Karls Universität Tübingen

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $\|f(x)\| \leq r$ für alle $x \in D$.

Merke: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn ihr Graph in einem horizontalen Streifen eingeschlossen ist. Eine unbeschränkte Funktion wächst "ins Unendliche".

Beispiele: (nächste Seite)

Funktion f	$D \to \mathbb{R}^d$	beschränkt?
$\sin, \cos$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
$\arcsin, \arccos$	$[-1, 1] \to \mathbb{R}$	ja, $r = 2\pi$
$\tan$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$	nein
$\arctan$	$\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	ja, $r = \frac{\pi}{2}$
$\exp$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	nein
$\exp$	$(-\infty, 0] \to \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
$\log$	$(0, \infty) \to \mathbb{R}$	nein
Fibonacci	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	nein
$x \mapsto x^\alpha$	$(0, \infty) \to \mathbb{R}$	ja für $\alpha = 0$, nein für $\alpha \neq 0$
$x \mapsto x^\alpha$	$[1, \infty) \to \mathbb{R}$	ja für $\alpha \leq 0$, nein für $\alpha > 0$
$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ für $A \in \mathcal{M}(n, m)$	$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$	ja für $A = 0$, sonst nein
$\vec{x} \mapsto \lvert\vec{x}\rvert$	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	nein

Definition: Eine Folge $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ von Vektoren $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$ heißt konvergent gegen den Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$, geschrieben

- $\vec{a}_n \to \vec{a}$ oder
- $\vec{a}_n \xrightarrow{n\to\infty} \vec{a}$ oder
- $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$,

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt $|\vec{a}_n - \vec{a}| < \varepsilon$.

Kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a} \;\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > n_0 : \; |\vec{a}_n - \vec{a}| < \varepsilon$.

- In diesem Fall heißt $\vec{a}$ der Grenzwert oder Limes der Folge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$; man sagt auch, $\vec{a}_n$ geht gegen $\vec{a}$.
- Ist eine Folge gegen keinen Vektor konvergent, so heißt sie divergent.

Beispiele:

- $a_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen 0.
- $+1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ \ldots$ (d.h. $a_n = (-1)^n$) divergiert.
- Die Folge

$$1,\ \ 1+\tfrac{1}{2},\ \ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4},\ \ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8},\ \ \ldots,$$

d.h. $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k$,

konvergiert gegen 2.

Allgemein nennt man eine Folge der Form

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

eine (unendliche) Reihe und nennt den Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad \text{oder} \qquad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$$

konvergent gegen a wenn die Folge der Partialsummen a_n gegen a konvergiert. Man nennt dann a auch den Wert dieses Ausdrucks.

Satz (ohne Beweis): Eine Folge $\vec{a}_n$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann (dann und nur dann) gegen $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$, wenn in $\mathbb{R}$ jede Komponente $a_{n,i}$ gegen a_i konvergiert. ("Konvergenz gilt komponentenweise.")

Da sich eine Zahlenfolge als Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ auffassen lässt, ist sie genau dann beschränkt, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $-r \leq a_n \leq r$ für alle Folgenglieder a_n gilt.

Satz (ohne Beweis): Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}^d$ ist beschränkt.

Folgerungen:

- Die Fibonacci-Folge divergiert.
- Die Folge $0, 2, 4, 6, \ldots$ der geraden Zahlen divergiert.

Bemerkung:

Es gibt zwei Arten zu divergieren: entweder ins Unendliche, oder beschränkt (rastloses Umherlaufen wie $+1, -1, +1, -1, \ldots$).

Satz (ohne Beweis):
Ist eine Folge monoton und beschränkt, so konvergiert sie.

Satz (ohne Beweis): Wenn für die Zahlenfolgen a_n, b_n und c_n gilt

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ sowie
- $a_n \to a$ und $c_n \to a$,

dann gilt auch $b_n \to a$.

Satz (ohne Beweis): Wenn die Folgen $\vec{a}_n, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^d$ konvergieren, $\vec{a}_n \to \vec{a}$ und $\vec{b}_n \to \vec{b}$, dann konvergieren auch

- die Summen, $\vec{a}_n + \vec{b}_n \to \vec{a} + \vec{b}$, und
- die Vielfachen, $\lambda\vec{a}_n \to \lambda\vec{a}$ $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$
- Sind $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ Zahlenfolgen (statt Vektoren), dann konvergieren auch die Produkte, $a_n b_n \to ab$.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt stetig, wenn für jede konvergente Folge $a_n \to a$ mit $a_n \in D, a \in D$ gilt $f(a_n) \to f(a)$.

Beispiele:

- Die Heaviside-Funktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

  ist nicht stetig, weil die Folge $a_n = -\frac{1}{n}$ gegen $a = 0$ konvergiert, aber $\theta(a_n) = 0$ für alle n, während $\theta(a) = 1$.
- $\sin$, $\cos$, $\arctan$, $\exp$ sind stetig auf $\mathbb{R}$
- $\arcsin$, $\arccos$ sind stetig auf $[-1, 1]$
- $\log$, $x \mapsto x^\alpha$ sind stetig auf auf $D = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$,
- $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, $\vec{x} \mapsto |\vec{x}|$ sind stetig auf $D = \mathbb{R}^m$.

Merke: Anschaulich ist eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne abzusetzen.

Satz über Fourierreihen (ohne Beweis):
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periodenlänge T, dann gibt es reelle Zahlen $c_0, c_1, c_2, \ldots \geq 0$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in [0, 2\pi)$ so, dass

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Die rechte Seite heißt die Fourier-Reihe von f.

Anwendung: Obertonreihe in der Akustik

- Ton (Schwankung des Luftdrucks): Überlagerung harmonischer Schwingungen der Form $\sin(\omega t + \varphi)$
- Frequenzen: ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz, d.h. $c_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$.
  - Term mit $k = 1$: Grundton
  - Terme mit $k \geq 2$: Obertöne
- c_k heißt Amplitude, φ_k die Phasenverschiebung
- c_k^2 ist die Intensität (Energieinhalt) der k-ten Oberschwingung

Satz: Die geometrische Folge $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $-1 < q \leq 1$; für $q = 1$ konvergiert sie gegen 1, für $|q| < 1$ gegen 0.

Satz: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$, wenn $|q| < 1$, und divergiert andernfalls.