

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

11. Januar 2010

Beispiel

Anglerlatein

Grenzwerte

Ableitungen

Definition

Tangente

Beispiel: Geschwindigkeit

Ableitungen einiger Funktionen

Summen- & Produktregel

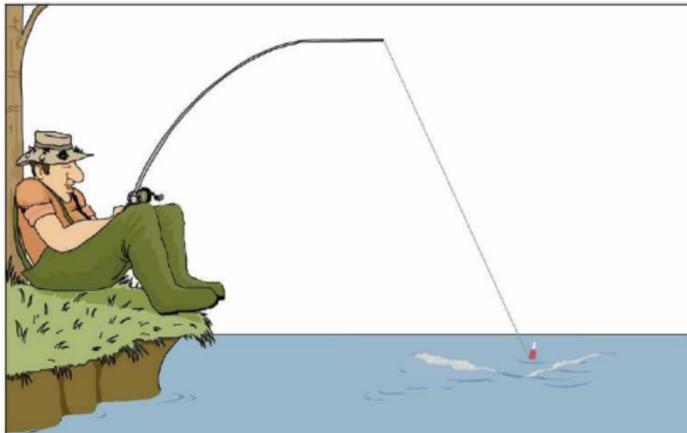
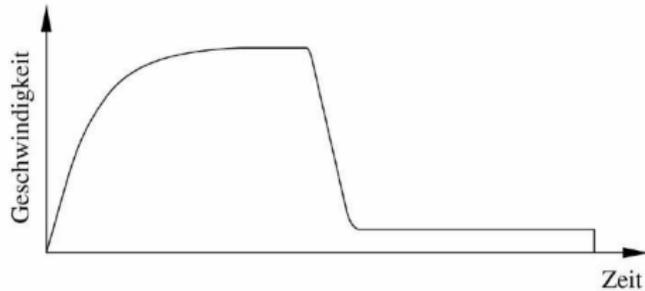
Kettenregel

Ableitung der Umkehrfunktion

Extrema

notwendige Bedingung

hinreichende Bedingung



Welche Sportart passt zu diesem Graphen?

- ▶ Angeln
- ▶ Stabhochsprung
- ▶ 100m-Lauf
- ▶ Fallschirmspringen
- ▶ Golf
- ▶ Speerwerfen
- ▶ Hochsprung
- ▶ Turmspringen
- ▶ Drag Racing
- ▶ Wasserski

nach W. Herget, <http://did.mathematik.uni-halle.de/lehrerseite>



Definition: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^m$ hat den Grenzwert λ im Punkt b ,

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lambda,$$

wenn für jede Folge b_n in D mit $b_n \rightarrow b$ gilt, dass $f(b_n) \rightarrow \lambda$.

Beachte:

- ▶ b muss nicht in D liegen, d.h. $f(b)$ ist möglicherweise nicht definiert, und das ist tatsächlich der Hauptanwendungsfall.
- ▶ Nicht jede Funktion hat in jedem Punkt einen Grenzwert (Gegenbeispiel Heaviside-Funktion in 0).
- ▶ Falls $b \in D$, dann gilt: f ist stetig in $b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$.



Definition: Die Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **differenzierbar im Punkt $x \in (a, b)$** , wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Dieser Wert heißt der **Differenzialquotient** oder **die (erste) Ableitung von f in x** .



- ▶ Ist f auf dem gesamten Definitionsbereich $D = (a, b)$ differenzierbar, so heißt die dadurch definierte Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ die **(erste) Ableitung von f** .
- ▶ Ist f' wiederum auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f' die **zweite Ableitung** von f , f'' .
- ▶ Ist f'' auch auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f'' die **dritte Ableitung** von f , f''' , und so weiter.



$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, **Tangente in $x \in (a, b)$:**

$$T(u) = f(x) + f'(x)(u - x)$$



Tangente T als **Näherungsfunktion** für f in der Nähe von x .

Anwendung: Größtfehlerabschätzung

- ▶ gemessen: x mit Ungenauigkeit δx
- ▶ gesucht: Wert der Größe $y = f(x)$ mit Ungenauigkeit δy
- ▶ näherungsweise: $\delta y = |f'(x)| \delta x$.



Beispiel: ein punktförmiges Objekt befinde sich zur Zeit t am Ort

$$\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^d$$

- ▶ $\vec{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **Kurve** im \mathbb{R}^d
- ▶ **mittlere Geschwindigkeit** im Zeitintervall $[a, b]$

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}(b) - \vec{x}(a)}{b - a}$$

- ▶ (Momentan-) **Geschwindigkeit** zur Zeit $t \in [a, b]$

$$\vec{v}(t) = \vec{x}'(t) \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="655 578 704 644"/>$$

- ▶ **Notation:** Zeitableitung mit Punkt statt Strich, $\dot{\vec{x}}$ statt \vec{x}'
- ▶ Betrag der Geschwindigkeit: $|\dot{\vec{x}}(t)|$
- ▶ **Bewegungsrichtung:** Einheitsvektor in Richtung von $\dot{\vec{x}}(t)$,

$$\vec{e}_{\dot{\vec{x}}(t)} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}.$$



zweite Ableitung $\ddot{f}(t)$: **Beschleunigung**
Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{f}(t)$ mit der Zeit

Bedeutung von $f(t)$	Bezeichnung für $\dot{f}(t)$
Position [m]	Geschwindigkeit [m/s]
Geschwindigkeit [m/s]	Beschleunigung [m/s ²]
Winkel [°]	Winkelgeschwindigkeit [1/s]
Menge [X]	Zuwachsrate [X/s]
Energie [Joule]	Leistung [Watt]
el. Ladung [Coulomb]	el. Strom [Ampere]

Notation: $f' = \frac{df}{dx}$ oder $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ wenn f Funktion von x bzw. t



Ableitungen einiger wichtiger Funktionen ($\alpha \in \mathbb{R}$)

f	f'
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto \alpha x$	$x \mapsto \alpha$
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
exp	exp
log	$x \mapsto \frac{1}{x}$
sin	cos
cos	$-\sin$

Beispiel:



Satz: (Summen- und Produktregel)

Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenzierbar, so auch $f + g$ und αf für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

- ▶ $(f + g)' = f' + g'$ und
- ▶ $(\alpha f)' = \alpha f'$.

Im Fall $d = 1$ ist auch fg differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.

Beweis: 

Beispiel: Ableiten eines Polynoms

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{d}{dx} a_k x^k = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Satz: (Kettenregel)

Sind $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ und $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenzierbar, dann ist die verkettete Funktion

$$\begin{aligned} h &:= f \circ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

differenzierbar mit $h'(x) = f'(g(x)) g'(x)$.

Beweisidee: 

Beispiele:

- ▶ $(e^{-\lambda x})' = -\lambda e^{-\lambda x}$
- ▶ $(e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2}$

Ableitung der Umkehrfunktion:

Hat die Funktion $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine **Umkehrfunktion** f^{-1} ,

▶ so gilt $f^{-1}(f(x)) = x$.

▶ Mit der Kettenregel folgt $f^{-1}'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

und damit¹

$$f^{-1}'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

(falls Nenner $\neq 0$)

So bestimmt man die Ableitungen von \log , \arcsin , \arccos , \arctan aus denen von \exp , \sin , \cos , \tan .

Beispiel: \log' 

$${}^1y := f(x) \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Extrema: Oft möchte man für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wissen, wo sie ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Für Maximum oder Minimum sagt man auch Extremum.

Satz: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und hat im Punkt $x \in (a, b)$, der nicht am Intervallende liegt, ein (lokales) Extremum, dann gilt $f'(x) = 0$.

Grund: Horizontale Tangente. 

Umgekehrung gilt nicht: Sei $x \in (a, b)$. Wenn $f'(x) = 0$, muss nicht unbedingt ein Extremum vorliegen.

Beispiel: $f(x) = x^3$ hat $f'(x) = 3x^2$ mit Nullstelle bei $x = 0$, aber dort weder Maximum noch Minimum.



Allerdings: Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (oder $f''(x) < 0$), dann hat f in x ein **lokales Minimum** (bzw. ein lokales Maximum), d.h. es gibt ein Intervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ mit $x \in [c, d]$, so dass in x das eindeutige Minimum (bzw. Maximum) von f auf $[c, d]$ liegt.