Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Integration

Stefan Keppeler

18. Januar 2010

Definition: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ die Ableitung von $F : [a,b] \to \mathbb{R}^d$, so heißt F Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f.

Beispiel:

Bemerkung: Ist F Stammfunktion von f, so ist auch $F + C$, mit beliebiger Konstante $C \in \mathbb{R}^d$, denn

$$(F+C)' = F' + C' \underset{C'=0}{=} F' = f$$

Satz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar und $f' = 0$ auf ganz $[a,b]$, so ist f konstant.

Beispiel: Fährt ein Auto mit der Geschwindigkeit Null, so kommt es nicht vom Fleck.

Folgerung: Ist F Stammfunktion von f, so sind alle Stammfunktionen von f von der Form $F + C$ mit $C \in \mathbb{R}^d$.

Integration als kontinuierliche Summation bzw. Mittelung

Beispiele:

1. Zeitmittel der Temperatur

- $T(t)$: Temperatur an einem Ort zur Zeit t.
- Mittelwert der Temperaturen zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$:

$$\overline{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T(t_i)$$ (z.B. 12-Uhr-Temperaturen der letzten Woche)

- **Ziel:** Mittel über alle Zeitpunkte im Intervall $[a, b]$:

$$\overline{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(z.B. Durchschnittstemperatur über 24 Stunden)
$\int \ldots$ noch zu definieren – **Idee:** näherungsweise...

- . . . näherungsweise:

  Mittelung über n Zeitpunkte, z.B.
  - hinreichend viele Zeitpunkte,
  - in gleichmäßigen Abständen so,
  - dass sich $T(t)$ zwischen zwei Zeitpunkten nicht stark verändert (z.B. jede halbe Stunde).

- eventuell besser:
  ungleichmäßige Abstände . . . **gewichtetes Mittel**

- gewichtetes Mittel

$$\overline{T} = \sum_{i=1}^{n} g_i \, T(t_i)\,,$$

$g_i \geq 0$: "Gewichte", mit

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1$$

(voher: $g_i = 1/n$ für jedes i)

Approximation des kontinuierlichen Zeitmittels:
Zerlege Zeitintervall $[a,b]$ so in Teilintervalle $[a_i,b_i]$ mit
$a_1 = a$, $b_i = a_{i+1}$, $b_n = b$ und $t_i \in [a_i,b_i]$,

$$g_i = \frac{b_i - a_i}{b - a}$$

Länge des Teilintervalls $\Delta t = b_i - a_i$
durch Länge des Gesamtintervalls

exakt, falls T auf jedem Teilintervall $[a_i,b_i]$ konstant

Interpretation: Flächeninhalt

- Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f \geq 0$, der Abszisse (x-Achse), und den Geraden $x = a$ und $x = b$ ist gegeben durch das Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- Für eine Funktion f, die auch negative Werte annimmt, ist das Integral gerade $A_+ - A_-$, wobei
  - A_+ die Fläche oberhalb der Abszisse und
  - A_- die unterhalb ist.

  In anderen Worten, jedes Flächenstück wird mit dem Vorzeichen von f versehen.

Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachte eine Zerlegung von $[a,b]$ in n Teilintervalle $[a_{n,i}, b_{n,i}]$, $i = 1, \ldots, n$ mit $\quad a_{n,1} = a, \quad a_{n,i+1} = b_{n,i}, \quad b_{n,n} = b$,
so dass für die Maschenweite

$$\delta_n = \max_{1 \le i \le n} (b_{n,i} - a_{n,i}) \qquad \text{gilt} \qquad \delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Man definiert die Riemannsche Obersumme $S_O(n)$ für die n-te Zerlegung,

$$S_O(n) := \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in [a_{n,i}, b_{n,i}]} f(x) \;\; (b_{n,i} - a_{n,i})\,,$$

sowie die Riemannsche Untersumme $S_U(n)$,

$$S_U(n) := \sum_{i=1}^{n} \min_{x \in [a_{n,i}, b_{n,i}]} f(x) \;\; (b_{n,i} - a_{n,i})\,.$$

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann existiert eine Zahl, das Integral von f über $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

so dass

$$S_O(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad S_U(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:
Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f = F'$ stetig, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Ist umgekehrt eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

eine Stammfunktion von f.

Beweisidee:

- Integration eines Polynoms

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{n} c_k \, x^k \, dx = ?$$

- Nicht immer gibt es eine "einfache Formel" für die Stammfunktion. Die Gauß-Funkion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ist stetig und besitzt nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(y) \, dy \, .$$

Diese lässt sich aber nicht durch "elementare" Funktionen ausdrücken.

- **Mechanische Arbeit** $=$ **Kraft** mal **Weg**, vorausgesetzt, die Kraft ist entlang des Weges konstant.
- **Beispiel:**
  Hebe ein Gewicht von $1\,\mathrm{kg}$ um einen Meter an.
  Schwerkraft $K = mg$
  Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$
  Schwerefeldstärke auf der Erde $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$
  also $K = 9{,}81\,\mathrm{kg\,m/s^2} = 9{,}81\,\mathrm{N}$

  mechanische Arbeit $A = Ks = 9{,}81\,\mathrm{N\,m} = 9{,}81\,\mathrm{J}$.
- Ist nun aber die Kraft nicht konstant, sondern beträgt nach Wegstrecke s gerade $K(s)$, so gilt

$$A = \int_{s_1}^{s_2} K(s)\,ds\,.$$

Beispiel: Auslenkung eines Pendels