Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Uneigentliche Integrale & mehrdimensionale Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

25. Januar 2010

Uneigentliche Integrale

- Unendlich
- Integrand divergiert
- Grenze ∞

Mehrdimensionale Differenziation

- Partielle Ableitungen
- Richtungsableitungen
- Totale Ableitung ∇, Tangentialebene
- Zweite Ableitungen

Definition: Die Zahlenfolge a_n geht gegen unendlich, $a_n \to \infty$, falls $\forall\, r > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n > n_0 :\ a_n > r$, d.h. wenn jeder noch so große Wert r schließlich überschritten wird.

a_n geht gegen minus unendlich, $a_n \to -\infty$, wenn $-a_n \to \infty$.

Beispiel: Für die Funktion (Sättigungskurve)

$$f(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{mit } \lambda > 0$$

gilt: $f(a_n) \to 1$ für jede Zahlenfolge a_n mit $a_n \to \infty$.

Man schreibt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \qquad \text{oder} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

- Bisher können wir $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und f stetig.
- Nun divergiere der Integrand bei $c \in [a, b]$.
- Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &:= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta \to 0+} \int_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

falls alle Grenzwerte existieren.

Beispiel: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

- Ist dagegen eine Integrationsgrenze gleich $\pm\infty$, so definieren wir analog

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.}$$

$$\int_{-\infty}^b g(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(für f stetig auf $[a,\infty)$ und g stetig auf $(-\infty,b]$).

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

Halten wir in der Funktion $f(x, y)$, d.h. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die Variable y fest ("behandeln y als Zahl") und leiten dann (nach x) ab, so bilden wir die partielle Ableitung von f nach x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Bemerkung: $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Umgekehrt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Beispiel:

$$f(s, t) = s\mathrm{e}^t + \sin(st)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t} =$$

- $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; partielle Ableitung nach x_1 ist
  Ableitung in Richtung von $\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{h}\,.$$

- Richtungsableitungen in beliebiger Richtung:
  $\vec{e} \in \mathbb{R}^d$ mit $\|\vec{e}\| = 1$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} \qquad \left(=: \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x})\right)$$

- Richtungsableitung lässt sich aus den partiellen Ableitungen berechnen, z.B. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{e} = (e_1, e_2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = e_1 \frac{\partial f}{\partial x} + e_2 \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}\,.$$

- Der Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ heißt Gradient von f,

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}\right),$$

  und ist ein Vektorfeld, d.h. eine Funktion $\nabla f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

- $\nabla f(x)$: Richtung des steilsten Anstiegs
  $\|\nabla f(x)\|$: Steigung (Richtungsableitung) in dieser Richtung

- Tangentialebene T an den Graphen von f im Punkt $\vec{\xi}$:

$$T(\vec{x}) = f(\vec{\xi}) + \nabla f(\vec{\xi}) \cdot (\vec{x} - \vec{\xi}) = f(\vec{\xi}) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi})\,(x_i - \xi_i)\,.$$

  wobei $\vec{u} \cdot \vec{v}$ für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^d$ das Skalarprodukt ($\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$) ist,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i = (u_1, \ldots, u_d) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \vec{u}^T \vec{v}$$

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ hat d erste partielle Ableitungen und d^2 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \,,$$

- die die sogenannte Hesse-Matrix H bilden. **Beispiel:** $f(x, y)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Satz: Wenn die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar ist und die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} .$$

Folgerung: H ist dann eine symmetrische Matrix, $H^T = H$.

Satz:

- Hat die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ ein (lokales) Minimum oder Maximum, so ist $\nabla f(\vec{x}) = 0$.
- Ist umgekehrt $\nabla f(\vec{x}) = 0$ und die Hesse-Matrix $H(\vec{x})$
  - positiv-definit, so hat f in $\vec{x}$ ein lokales Minimum.
  - negativ-definit, so hat f in $\vec{x}$ ein lokales Maximum.

Definition: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}(n, n)$ heißt

- positiv-definit, wenn für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{u} \neq 0$ gilt $\vec{u}^T A \vec{u} > 0$.
- negativ-definit, wenn für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{u} \neq 0$ gilt $\vec{u}^T A \vec{u} < 0$.