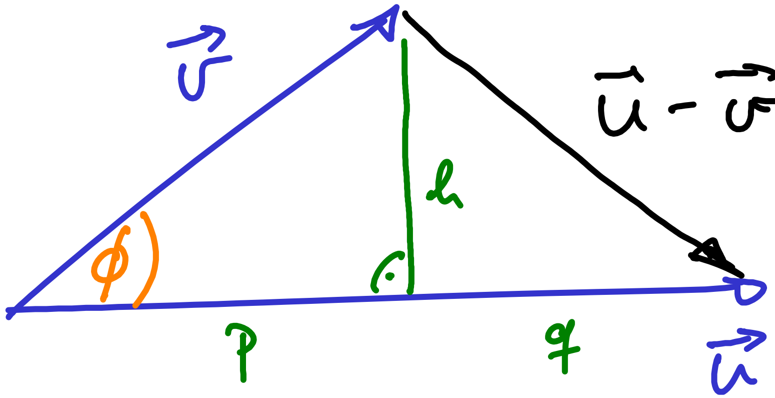
Bitte denken Sie aus

Vorrechnen

(mind. 1x vor dem 12.12.09)



Pythagoras rechts: $h^2 + q^2 = |\vec{u}-\vec{v}|^2$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 + (|\vec{u}| - p)^2 = (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{h^2} + \cancel{|\vec{u}|^2} - 2|\vec{u}|\,p + \cancel{p^2} = \cancel{\vec{u}^2} + \cancel{\vec{v}^2} - 2\,\vec{u}\,\vec{v} \quad \Big|\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

Pythagoras links

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\phi = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

$\cos\phi = \frac{p}{|\vec{v}|}$

Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

z. B. $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Typ $n \times m$

Zeilen   Spalten

$n \neq m$: rechteckig

$$\underbrace{A}_{\text{Matrix}} = \underbrace{(\underbrace{a_{ij}}_{\text{Matrixelement}})}_{\text{mit Klammer: Matrix}}$$

$i = 1, \ldots, n$

$j = 1, \ldots, m$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

alle 2×3

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

nicht definiert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad\qquad$ 3×4

gleich, also Produkt möglich

Ergebnis : 2×4

Zeile mal Spalte

$$\overset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = B$$

$$A = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \qquad \underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 13 & 31 \end{pmatrix}} = AB$$

$$13 = 1\cdot 0 + 2\cdot 5 + 3\cdot 1$$

$$4\cdot 0 + 5\cdot(-1) + 6\cdot 1 = 1$$

$B\cdot A$ ist hier <u>nicht</u> definiert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ also <u>nicht</u> symmetrisch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$ ist symmetrisch, $A^T = A$

nur möglich für quadratische Matrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^2}}_{2 \times 1} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^3}}_{3 \times 1}$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{Tü} \arrow[r, bend left, "5\%"] & \text{RT} \arrow[l, bend left, "10\%"]
\end{tikzcd}
$$

$$
N^{(0)} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 84\,000 \\ 112\,000 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Tübinger} \\ \text{Reutlinger} \end{array} \end{array}
$$

$$N_1^{(1)} = 0{,}95 \cdot N_1^{(0)} + 0{,}1 \cdot N_2^{(0)}$$ Tübinger, 1 Jahr später

$$N_2^{(1)} = 0{,}05\, N_1^{(0)} + 0{,}9\, N_2^{(0)}$$ Reutling., —"—

$$
N^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}}_{=W,\ \text{Übergangsmatrix}} N^{(0)}
$$

Fibonacci-Hasen

einjährige & zweijährige Hasen $\quad N^{(t)} = \begin{pmatrix} N_1^{(t)} \\ N_2^{(t)} \end{pmatrix}$

- einjährige Hasen kriegen Junge (2 pro Paar, also 1 pro Hase)

  und werden zweijährige
- zweijährige Hasen kriegen Junge (wie oben)

  und sterben

$$N_1^{(t+1)} = N_1^{(t)} + N_2^{(t)}$$

$$N_2^{(t+1)} = N_1^{(t)}$$

$$N^{(t+1)} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{Leslie-Matrix}} N^{(t)}$$

erweitertes Modell

20% der zweijährigen Hasen werden 3-jährig + kriegen nochmal Junge

5% der Hasen sterben einjährig

$$N_1^{(t+1)} = N_1^{(t)} + N_2^{(t)} + N_3^{(t)}$$

$$N_2^{(t+1)} = 0{,}95 \cdot N_1^{(t)}$$

$$N_3^{(t+1)} = 0{,}2 \cdot N_2^{(t)}$$

$$N^{(t+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} N^{(t)}$$

$\neq 0$ N_3: Hasen 3 Jahre und älter

$$N^{(1)} = W N^{(0)}$$

$$N^{(2)} = W N^{(1)} = W \cdot (W N^{(0)})$$

$$= (W \cdot W) N^{(0)}$$

gegeben: $A \neq 0$, $A^2 = 0$ (auf ÜBlatt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

Annahme: A hat Inverse, $A^{-1} \cdot A = I$

$A^2 = 0$ von links mult A^{-1}

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot A = 0$$

$$\Leftrightarrow I \cdot A = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 0$$

↯ zur Voraussetzung, dass $A \neq 0$