Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2014/15

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

23.10.2014
Blatt 2

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1:

(a) Untersuchen Sie folgende Relationen auf $\mathbb{Z}$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:

$$R_1 := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \neq b\}, \qquad R_2 := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \cdot b > 0\},$$
$$R_3 := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \mid b\}, \qquad R_4 := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a < b\}.$$

(b) Geben Sie jeweils eine Relation auf der Menge $\{1,2,3\}$ an, welche

(i) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist,

(ii) reflexiv, aber weder symmetrisch noch transitiv ist.

Aufgabe 2:

(a) Sei A eine Menge und $(R_i)_{i\in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf A. Zeigen Sie, dass $R := \bigcap_{i\in I} R_i$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Zeigen Sie, dass es eine kleinste Äquivalenzrelation auf A gibt, die R enthält, d.h. es gibt eine Äquivalenzrelation R' auf A mit $R \subseteq R'$ und für jede andere Äquivalenzrelation R'' auf A mit $R \subseteq R''$ gilt $R' \subseteq R''$.

(c) Geben Sie die kleinste Äquivalenzrelation R auf $\mathbb{N}$ an, für welche $\{(1,1),(1,2),(1,3)\} \subseteq R$ gilt.

Aufgabe 3:

(a) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $B \subseteq N$. Zeigen Sie

$$f^{-1}\left(\complement B\right) = \complement(f^{-1}(B)).$$

(b) Sei M eine Menge und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von M. Zeigen Sie

$$\complement\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement B_i \qquad \text{und} \qquad \complement\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement B_i.$$

Aufgabe 4: Sind $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen, so definiert man die Komposition $S \circ R \subseteq A \times C$ von R und S durch

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C : \text{es existiert ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\}.$$

Zeigen Sie: Sind R und S Abbildungen, so ist auch $S \circ R$ eine Abbildung.

Abgabe: Am Donnerstag, dem 30. Oktober 2014, in der Vorlesung.