

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Integration

Stefan Keppeler

12. Januar 2015



Stammfunktionen

Mittelung

Beispiel: Temperaturen

Integration

Definition: Flächeninhalt

Hauptsatz

Beispiele

Technik: Partielle Integration

Fourierreihen



Definition: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Ableitung von $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, so heißt F **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von f .

Beispiel: 

Bemerkung: Ist F Stammfunktion von f , so ist auch $F + C$, mit beliebiger Konstante $C \in \mathbb{R}^d$, denn

$$(F + C)' = F' + C' \underset{C'=0}{=} F' = f \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="695 465 745 535"/>$$

Satz: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenzierbar und $f' = 0$ auf ganz $[a, b]$, so ist f konstant.

Beispiel: Führt ein Auto mit der Geschwindigkeit Null, so kommt es nicht vom Fleck.

Folgerung: Ist F Stammfunktion von f , so sind alle Stammfunktionen von f von der Form $F + C$ mit $C \in \mathbb{R}^d$.



Integration als kontinuierliche Summation bzw. Mittelung

Beispiel: Zeitmittel der Temperatur

- ▶ $T(t)$: Temperatur an einem Ort zur Zeit t .
- ▶ Mittelwert der Temperaturen zu den Zeitpunkten t_1, \dots, t_n :

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(t_i) \quad \left(\begin{array}{l} \text{z.B. 12-Uhr-Temperaturen} \\ \text{der letzten Woche} \end{array} \right) \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="825 458 875 525"/>$$

- ▶ **Ziel:** Mittel über alle Zeitpunkte im Intervall $[a, b]$:

$$\bar{T} = \frac{\text{Fläche unter } T(t)}{\text{Länge des Zeitintervalls}}$$

(z.B. Durchschnittstemperatur über 24 Stunden) 



Anschauliche “Definition”:

- ▶ Den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f \geq 0$, der x -Achse sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ nennen wir

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="630 375 680 440"/>$$

das **Integral** der Funktion f von a bis b .

- ▶ Für eine Funktion f , die auch negative Werte annimmt, ist das Integral gerade $A_+ - A_-$, wobei
 - ▶ A_+ die Fläche oberhalb der x -Achse und
 - ▶ A_- die unterhalb ist.

In anderen Worten, jedes Flächenstück wird mit dem Vorzeichen von f versehen.



Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f = F'$ stetig, dann ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Ist umgekehrt eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so ist die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(y) \, dy$$

eine Stammfunktion von f .

Beweisidee: 

Bemerkung: Wir schreiben auch $\int f(x) \, dx = F(x)$
(unbestimmtes Integral), falls $F' = f$.



► Integration eines Polynoms

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n c_k x^k dx = ? \quad \text{✎}$$



$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = ? \quad \text{✎},$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = ? \quad \text{✎}$$

► $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt = ? \quad \text{✎},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) dt = ? \quad \text{✎}$$



Satz: Seien f und g stetig differenzierbar auf $[a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Beweis: 

Beispiele:

▶ $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = ?$ , $\int \log x dx = ?$ 

▶ $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = ?$ 



Wiederholung¹: Satz über Fourierreihen

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hübsch² und periodisch mit Periodenlänge 2π , dann gibt es reelle Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, b_3, \dots so, dass

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite heißt die **Fourier-Reihe** von f .

Weiter: Es gilt ($n \geq 1$)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt,$$

und
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$



¹vgl. Vorl. 6 Trigonometrie und Vorl. 10 Konvergenz & Stetigkeit

²etwas mehr als stetig

