

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 23.01.2015)

Aufgabe 68

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 5 \\ 0 & -5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AY = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie hätten Sie \vec{x} , X , oder Y bestimmen können, ohne zunächst A^{-1} zu berechnen?

Aufgabe 69

(10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & \pi & 8 \\ 1 & 5 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}^7$$

HINWEIS: Zur Definition von A^n siehe Aufgabe 70.

Aufgabe 70

(10 Punkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \quad \dots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

HINWEISE: (i) Berechnen Sie zunächst A^2 , A^3 und A^4 . Folgern Sie daraus wie A^{2n} und A^{2n+1} aussehen. (ii) Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 71

(10 Punkte)

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0 \neq \det B$, und sei $A^{-1} - B^{-1} = C$.
Zeigen Sie: $BCA = ACB$.

Aufgabe 72

(10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: $(O(2, \mathbb{R}), \cdot)$ mit

$$O(2, \mathbb{R}) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid |\det A| = 1 \right\}$$

und dem Matrixprodukt \cdot ist eine nicht-abelsche Gruppe.

Aufgabe 73

(9 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 08.02.15 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Determinant of a 3x3 matrix*,
- *Inverse of a 3x3 matrix* und
- *Solving matrix equations*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 2).