

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 23.11.2007)

Aufgabe 26

(10 Punkte)

Die hyperbolischen Funktionen wurden in Aufgabe 25 definiert. Beweisen Sie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) \\ \text{und } \cosh(x+y) &= \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y). \end{aligned}$$

Aufgabe 27

(10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$.

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mithilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus! Geben Sie $(\tanh x)'$ einmal ausgedrückt durch $\cosh x$ und einmal ausgedrückt $\tanh x$ aus!

HINWEIS: Verwenden Sie die Definition aus Aufgabe 25 sowie die bekannte Ableitung von e^x . Denken Sie bei Aufgabenteil c) auch an die Beziehung aus Aufgabe 25 c).

Aufgabe 28

(10 Punkte)

Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die Funktionen

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$.

streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, daß die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 29

(10 Punkte)

Die Umkehrfunktionen des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh , d.h.

$$\text{Arsinh}(\sinh(x)) = x;$$

analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche für

a) $\text{Arsinh}x$, b) $\text{Arcosh}x$ und c) $\text{Artanh}x$

an. (In Teil a) und c) ist dies eindeutig – in Teil b) sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ und von $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$.)

Aufgabe 30

(10 Punkte)

Berechnen Sie mithilfe von Satz 5 die Ableitungen von

a) $\text{Arsinh}x$, b) $\text{Arcosh}x$ und c) $\text{Artanh}x$.

(Sie benötigen dazu keine explizite Darstellung der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 27.)

Aufgabe 31

(10 Punkte)

Berechnen Sie nun auch explizit die Umkehrfunktion von $\sinh x$.

ERGEBNIS: $\text{Arsinh}x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$