Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Mehr über den Logarithmus

Stefan Keppeler

12. November 2008

Eberhard Karls Universität Tübingen

- Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h.

$$y = \log x$$

ist die eindeutige Lösung der Gleichung $\mathrm{e}^y = x$ zu gegebenem $x > 0$.
- Es gilt also $\log(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{\log x}$ für $x > 0$.
- Damit folgen Rechenregeln für den Logarithmus aus den Potenzrechenregeln, siehe ÜA 21
- **Notation:**
Machmal schreibt man auch $\ln$ (*Logarithmus naturalis*) statt $\log$ – wir schreiben $\log$.

Wann besitzt eine Funktion $f : A \to B$ eine Umkehrfunktion?

Definition: Eine Funktion $f : A \to B$ heißt injektiv, wenn die Bilder verschiedener Elemente stets verschieden sind, d.h.

$$f(x) \neq f(y) \quad \text{für} \quad x \neq y\,.$$

- Wenn f nicht injektiv ist, dann besitzt die Gleichung $f(x) = b$ für manche b mehrere Lösungen x.
- Wenn f injektiv ist, dann besitzt sie genau eine Lösung, genannt $x = f^{-1}(b)$, für jedes $b \in f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$.

Definition: Die so definierte Funktion $f^{-1} : f(A) \to A$ heißt Umkehrfunktion von f und erfüllt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

Beispiel:

- Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1(x) = x^2$.
- Ebenso ist $x \mapsto -\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $f_2 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = x^2$.

Beachte: (Notation)

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt
– streng monoton wachsend, wenn $f(x) < f(y)$ für $x < y$,
– streng monoton fallend, wenn $f(x) > f(y)$ für $x < y$,
– monoton wachsend, wenn $f(x) \leq f(y)$ für $x < y$ und
– monoton fallend, wenn $f(x) \geq f(y)$ für $x < y$.

Beispiele:

- $\exp$ ist streng monoton wachsend
- $f = const$ ist monoton wachsend und fallend, aber nicht streng
- $x \mapsto x^\alpha$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ ist streng monoton wachsend für $\alpha > 0$ und fallend für $\alpha < 0$.

Satz:
Streng monotone Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ sind injektiv.

Beweis:

Folgerung:

- Da $\exp$ streng wachsend ist,
- und da $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$,
- existiert auf $D = \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion, genannt $\log$ (Logarithmus).

Beispiel: Die Halbwertszeit $t_{1/2}$ einer radioaktiven Substanz ist die Zeit, in der die Aktivität (Anzahl Zerfälle pro Minute) oder auch die vorhandene Menge auf die Hälfte zurückgeht, also

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Zusammenhang zwischen $t_{1/2}$ und dem Zerfallsparameter λ:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\log 2}{\lambda} \qquad \text{oder} \qquad \lambda = \frac{\log 2}{t_{\frac{1}{2}}}\,, \qquad \text{denn}$$

Logarithmische Skalenteilung: Trage auf einer Skala nicht die interessante Größe x selbst sondern $\log x$ auf.[1]

- Allgemein: Stelle Variable über mehrere Größenordnungen dar.
- Erwarte exponentiellen Zusammenhang,
  $$y = c\,e^{\lambda x} \text{ mit Konstanten } c, \lambda \in \mathbb{R},$$
  y-Achse logarithmisch $\rightsquigarrow$ Gerade, denn
  $$\log y = \log c + \lambda x.$$
- Erwarte Potenzgesetz,
  $$y = c\,x^{\alpha} \text{ mit Konstanten } c, \alpha \in \mathbb{R},$$
  beide Achsen logarithmisch $\rightsquigarrow$ Gerade, denn
  $$\log y = \log c + \alpha \log x.$$

[1] Oft schreibt man dennoch x an die Achse, teilt sie aber logarithmisch ein.

Andere Basen

- Für $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ besitzt auch die Gleichung $\alpha^y = x$
- mit gegebenem $x > 0$
- eine eindeutige Lösung $y = \log_\alpha x$, genannt Logarithmus von x zur Basis α.

Bemerkung: Damit gilt $\log = \log_{\mathrm{e}}$.

Beliebte Basen außer e sind

- 2 ("binärer Logarithmus", lb) und
- 10 ("dekadischer Logarithmus", $\lg$).

Aus den Potenzrechenregeln folgt

$$\log_\alpha x = \frac{\log(x)}{\log(\alpha)}\,.$$

Der pH-Wert (lat. *pondus Hydrogenii* $=$ Gewicht des Wasserstoffs) ist ein Maß für die Säure einer Flüssigkeit und gibt die Konzentration der Wasserstoff-Ionen logarithmisch an,

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}(\rho)\,.$$

Hierbei ist ρ, grob gesagt,[2] die Konzentration der Protonen H^+.

- Wein ($\mathrm{pH} \approx 4$) hat also die 1000-fache Protonenkonzentration von Wasser ($\mathrm{pH} = 7$),
- Seife ($9 \leq \mathrm{pH} \leq 10$) entsprechend $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{1000}$ der H_3O^+-Konzentration von Wasser.

[2] genauer gesagt, der Quotient aus der Aktivität der Oxoniumionen H_3O^+ zur Aktivität von H_2O