

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I
Übungsblatt 11

Aufgabe 48:

i) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

f differenzierbar in (a, b) mit $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ ist konstant in (a, b) .

ii) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

iii) Finden Sie eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $[a, b]$ differenzierbar aber nicht Lipschitz-stetig ist (4 Extrapunkte).

Aufgabe 49: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existieren, dann ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

Aufgabe 50: Sei $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq K < 1 \forall x \in (0, 1)$. Sei $x_0 \in (0, 1)$ beliebig und für alle $n \geq 0 : x_{n+1} = f(x_n)$. Zeigen Sie, daß die Folge (x_n) konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie $x_{n+1} - x_n$, benutzen Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 51: Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkendicke. In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen?

Aufgabe 52: Ein Hund steht am Ufer eines Sees und will einen Stock aus dem Wasser holen. Der Stock hat die Distanz L zum Ufer. Die direkte Verbindung Hund-Stock bildet einen Winkel von 45° Grad zur Uferlinie. Der Hund rennt zunächst mit der Geschwindigkeit v die Strecke $l \in [0, L]$ am Ufer entlang, um dann direkt mit der Geschwindigkeit αv , $\alpha \in (0, 1)$ zum Stock zu schwimmen. Berechnen Sie die Zeit $t(l)$, die der Hund zum Stock benötigt. Berechnen Sie das optimale l (d.h. für das $t(l)$ minimal wird) in Abhängigkeit von α . Skizzieren Sie $t(l)$ für verschiedene Werte von α .

Die Klausur findet am Samstag, den 07.02.2009, von 10.00 bis 13.00 Uhr im Hörsaal N5 statt.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 12.01.2009, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 13.00-15.00 Uhr im 8D09.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre