Mathematische Resultate zur Quantenelektrodynamik

Absolut kontinuierliches Spektrum oberhalb des Grundzustands

Stefan Keppeler

18. Dezember 2008

- J. Fröhlich, M. Griesemer und I.M. Sigal
  Spectral theory for the standard model of non-relativistic QED
  Commun. Math. Phys. **283** (2008) 613–646

- Methode des konjugierten Operators
  - J. Sahbani
    The conjugate operator method for locally regular Hamiltonians
    J. Operator Theory **38** (1997) 297–322
  - H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch und B. Simon
    Schrödinger Operators (Kapitel 4)
    Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987

Physikalische Erwartungen

- Elektronen ohne Feld
  - Gebundene Zustände (Punktspektrum)
  - Kontinuum oberhalb Ionisierungsschwelle (absolut stetiges Spektrum)
- Elektronen mit Feld
  - Grundzustand ($\inf$ des Spektrums ist Eigenwert)
  - Angeregte Zustände werden Resonanzen
  - Kontinuum oberhalb des Grundzustands (absolut stetiges Spektrum)

Skalierung so, dass **Feinstrukturkonstante** α allein als Parameter im Wechselwirkungsterm von Elektron(en) und Feld auftritt:

$$H = \left(-\mathrm{i}\nabla + \alpha^{3/2} A(\alpha x)\right)^2 + \text{Coulomb} + H_f\,.$$

Zusammenhang mit physikalischem Hamilton-Operator:

Satz (vgl. Cycon *et al.* Proposition 4.1)
Sei H selbstadjungiert und $R(z) := \dfrac{1}{H-z}$. Weiter existiere für jedes φ aus einer dichten Menge eine Konstante $C(\varphi) > \infty$, so dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \sup_{\mu \in (a,b)} \langle \varphi, \operatorname{Im} R(\mu + \mathrm{i}\varepsilon)\, \varphi \rangle \leq C(\varphi)\,.$$

Dann hat H nur **absolut stetiges Spektrum** in (a,b).

Beweis:

Methode des Konjugierten Operators

- Voraussetzung: **Mourre Abschätzung**

$$E_\Delta(H)\,[H,\mathrm{i}A]\,E_\Delta(H) \geq \alpha E_\Delta(H)$$

- Folgerung: **Limiting Absorption Principle** $(s > \frac{1}{2})$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \langle\varphi, \langle A\rangle^{-s}\, R(\lambda \pm \mathrm{i}\varepsilon)\, \langle A\rangle^{-s}\,\psi\rangle \text{ ex. uniform}$$

...und weiter
(i) absolut stetiges Spektrum und
(ii) lokaler Zerfall durch Photonenemission,

$$\|\langle A\rangle^{-s}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\,f(H)\,\langle A\rangle^{-s}\| = O\big(\tfrac{1}{t^{s-1/2}}\big), \quad t\to\infty$$

- **Virial-Theorem** (folgt aus Mourre-Abschätzung):
  Keine Eigenwerte
- **Satz** (vgl. Cycon *et al.* Theorem 4.2)
  Seien H und A beschränkt und selbstadjungiert und sei $[H, \mathrm{i}A] = C^\dagger C$ mit $\ker(C) = \{0\}$.
  Dann hat H rein absolut stetiges Spektrum.

  Beweis:

  Bemerkung: Mourre Abschätzung: ähnlich, aber
  - Operatoren i.A. unbeschränkt
  - lokal im Spektrum

$H : D(H) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ s.a., A s.a., $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen

- H ist lokal von Klasse $C^2(A)$ in Ω, d.h.

$$s \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sA} f(H)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}sA} \varphi$$

  ist zweimal stetig diffbar $\forall\ f \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\forall\ \varphi \in \mathcal{H}$.
- Für jedes $\lambda \in \Omega$ existiert eine Umgebung Δ von λ mit $\overline{\Delta} \subset \Omega$ und eine Konstante $\alpha > 0$, so dass

$$E_\Delta(H)\, [H, \mathrm{i}A]\, E_\Delta(H) \geq \alpha E_\Delta(H)$$

  (Mourre-Abschätzung).

Geeignetes A: **Dilatationsoperator**

$$A = \mathrm{d}\Gamma(a)\,, \qquad a = \frac{1}{2}(px + xp)\,.$$

Anschaulich: (klassisch)

Dilatation: $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(px+xp)t}\,\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{dt}{2}}\,\varphi(\mathrm{e}^{-t}x)$

Definitionen / Forderung

- $E := \inf(H)$
- $E_1 := \inf \sigma(H_{e^-})$ isoliert und nicht-entartet
- $E_2 := \inf(\sigma(H_{e^-}) \setminus \{E_1\})$
- $E_{\text{gap}} := E_2 - E_1$

Satz (Mourre-Abschätzung; Fröhlich *et al.* Theorem 1)
Sei $\alpha \ll 1$. Dann gilt für jedes $\sigma \leq \frac{E_{\text{gap}}}{2}$

$$E_\Delta(H-E)\,[H, \mathrm{i}A]\,E_\Delta(H-E) \geq \frac{\sigma}{10} E_\Delta(H-E)\,,$$

wobei $\Delta = [\frac{\sigma}{3}, \frac{2\sigma}{3}]$.

Damit folgt absolut stetiges Spektrum in $\Omega = (E, E + \frac{E_{\text{gap}}}{3})$.

Warum α klein?