Mathematische Resultate zur Quantenelektrodynamik

Bosonischer Fockraum

Stefan Keppeler

23. Oktober 2008

Eberhard Karls Universität Tübingen

Klassische Mechanik

- …eines Punktteilchens

Quantenmechanik

- …eines Punktteilchens
- Motivation: Veränderliche Teilchenzahl
- …für N Teilchen

Bosonischer Fockraum

- Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Quantenfeldtheorie

- Quantenfeld heuristisch
- Operatorwertige Distributionen
- Zeitentwicklung: Freies Feld

Newtonsche Mechanik

- Ort $x \in \mathbb{R}^3$
- Bewegungsgleichung, z.B. $m\ddot{x} = -\nabla V(x)$ (V Potential)

Lagrangesche Formulierung

- Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$
- Wirkung $S[x] = \int_0^t L(x, \dot{x})\,\mathrm{d}t$
- Variation $\delta S \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ Bewegungsgleichung

Hamiltonsche Formulierung

- Kanonischer Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ (hier $= m\dot{x}$)
- Hamiltonfunktion $H(p, x) = p\dot{x} - L(x, \dot{x})\Big|_{\dot{x}=\dot{x}(p,x)}$

  (Legrendre-Trafo)

  hier $H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

Quantenmechanik

- Zustand beschrieben durch $\psi(t) \in \mathcal{H}$ (hier $= L^2(\mathbb{R}^3)$)
- Bewegungsgleichung: Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

- Hamiltonoperator $\hat{H} =$ "$H(\hat{p}, \hat{x})$" mit $[\hat{p}_j, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{jk}$[1] (Heisenbergsche oder kanonische Vertauschungsrelationen)
- In Schödinger- oder Ortsdarstellung realisiert durch

  $\hat{x}_j = x_j$ (Multiplikationsoperator) und

  $\hat{p}_j = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ (Differentialoperator) Beispiel:

[1] "Quantisierung":
Ersetze $p, x, H \dots$ durch lineare Operatoren $\hat{p}, \hat{x}, \hat{H}, \dots : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Wie beschreibt man z.B. Paarvernichtung?

Anzahl der Teilchen (eines bestimmten Typs) ändert sich!

- vorher: $(\#e^-, \#e^+, \#\gamma) = (1, 1, 0)$
- nachher: $(\#e^-, \#e^+, \#\gamma) = (0, 0, 2)$

zunächst: Feste Anzahl $N \geq 2$ identischer Teilchen

- $N = 2$
  - zunächst $\psi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}^6)$
  - $\psi(x_1, x_2)$ und $(\hat{P}\psi)(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$ beschreiben denselben Zustand, d.h. sind verknüpft durch eine unitäre Transformation
- analog $N \geq 2$:
  - zunächst $\psi \in \mathcal{H}^{\otimes N}$
  - Permutation $\sigma \in S_N$, unitäre Darstellung auf $\mathcal{H}^{\otimes N}$ erklärt durch $(\hat{P}(\sigma)\psi)(x_1, \ldots, x_N) = \psi(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(N)})$
  - Falls nun $\hat{A}$ observabel $\Rightarrow [\hat{A}, \hat{P}(\sigma)] = 0$

    ... Superauswahlregel
  - Reduziere Darstellung $\hat{P}$ bzw. zerlege $\mathcal{H}^{\otimes N}$ in permutationsinvariante Unterräume
    ... entsprechen unterschiedlichen Teilchensorten

physikalisch realisiert: Eindimensionale Darstellungen

- $\mathcal{H}_N^S$, vollständig symmetrische Wellenfunktionen:
  Bosonen, z.B. $\psi \in \mathcal{H}_2^S \Rightarrow \psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$
- $\mathcal{H}_N^A$, vollständig antisymmetrische Wellenfunktionen:
  Fermionen, z.B. $\psi \in \mathcal{H}_2^A \Rightarrow \psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$

allgemein

$$\mathcal{H}_N^S = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^{\otimes N} \mid \hat{P}(\sigma)\psi = \psi \right\}$$

$$\mathcal{H}_N^A = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^{\otimes N} \mid \hat{P}(\sigma)\psi = \mathrm{sign}(\sigma)\psi \right\}$$

Fockraum $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^S$, wobei $\mathcal{H}_0^S := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1^S = L^2(\mathbb{R}^3)$ etc.

- $\Phi \in \mathcal{F}$ ist eine Folge $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \dots)$ mit $\phi_j \in \mathcal{H}_j^S$
- Norm: $\|\Phi\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\phi_j\|_{L^2}^2$, wobei $\|\phi_0\|^2 := |\phi_0|^2$.
- Wichtiger Zustand: Vakuum $|0\rangle = \Omega = (1, \underbrace{0, 0, \dots}_{\text{keine Teilchen}})$
- Teilchenzahloperator $\hat{N}$: $(\hat{N}\Phi)_n = n\phi_n$

Erzeugungsoperator $a^\dagger(\psi)$ und Vernichtungsoperator $a(\psi)$
für Teilchen mit Wellenfunktion ψ

…sollten erfüllen

$$a^\dagger(\psi)\Omega = (0, \psi, 0, \dots)$$
$$a(\psi)(0, \psi, 0, \dots) = \alpha\Omega\,, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Die folgenden Definitionen sind gut:

$$\big(a(\psi)\Phi\big)_n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}(x)\,\phi_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}^3x \text{ für } n \geq 0$$

$$\big(a^\dagger(\psi)\Phi\big)_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} \psi(x_j)\,\phi_{n-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

für $n \geq 1$ und $\big(a(\psi)\Phi\big)_0 = 0$.

Eigenschaften

- $a^\dagger(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha a^\dagger(\psi) + \beta a^\dagger(\phi)$ (linear)
- Vertauschungsrelationen

$$[a(\psi), a^\dagger(\phi)] = \langle \psi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}^3 x$$

$$[a(\psi), a(\phi)] = 0 = [a^\dagger(\psi), a^\dagger(\phi)]$$

- Beispiele:
  - $\big(a^\dagger(\psi)(0, \psi, 0, \dots)\big)_2(x_1, x_2) =$
  - $\Phi = (0, 0, \phi_2, 0, \dots)$, $\qquad \phi_2(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$,

    $\big(a(\psi)\Phi\big)_1(x_1) =$
- Falls $\|\psi\|^2_{L^2} = 1$, so hat $a^\dagger(\psi)a(\psi)$ Eigenwerte $0, 1, 2, 3, \dots$, zählt Anzahl der Teilchen mit Wellenfunktion ψ

- Wähle ON-Basis $\{\psi_j\}$ des $L^2(\mathbb{R}^3)$, d.h.

$$\langle \psi_j, \psi_k \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}_j(x)\,\psi_k(x)\,\mathrm{d}^3x = \delta_{jk}$$

$$\sum_j \psi_j(x)\,\overline{\psi}_j(x') = \delta(x - x')$$

- **Formal:** Erzeuge ein Teilchen an der Stelle x durch

$$\Bigg(\underbrace{\sum_j a^\dagger(\psi_j)\,\overline{\psi}_j(x)}_{\text{“}=:\,a^\dagger(x)\text{”}}\ \Omega\Bigg)_1(x_1) = \sum_j \psi_j(x_1)\,\overline{\psi}_j(x) = \delta(x - x_1)$$

- $[a(x), a^\dagger(y)] = \sum_{jk} \underbrace{[a(\psi_j), a^\dagger(\psi_k)]}_{\langle\psi_j,\psi_k\rangle_{L^2} = \delta_{jk}}\,\psi_j(x)\,\overline{\psi}_k(y) = \delta(x - y)$

  …interpretiere als ∞-dimensionale Verallgemeinerung von $[\hat{p}_j, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{jk}$

- **eigentlich:** $a(x)$ opertorwertige Distribution,

$$a(\psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}(x)\, a(x)\, \mathrm{d}^3 x$$

- $a(x)$ definiert auf $\mathcal{D}$:
  - Φ mit endlicher Teilchenzahl,
    d.h. $\phi_j \neq 0$ für nur endliche viele j,
  - wobei alle $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ sein müssen.
- **allerdings:** $a^\dagger(x)$ nicht dicht definiert, also nicht abschließbar
- **aber:** normalgeordnete Produkte ("alle Vernicher rechts") können als quadratische Formen definiert werden,

$$\begin{aligned}&\langle \Phi,\, a^\dagger(x_1)\cdots a^\dagger(x_n)\, a(y_m)\cdots a(y_1)\,\Psi\rangle\\ &:= \langle a(x_n)\cdots a(x_1)\,\Phi,\, a(y_m)\cdots a(y_1)\,\Psi\rangle\end{aligned}$$

Eberhard Karls Universität Tübingen

- Einteilchen-Zeitentwicklung: Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \hat{H} \psi(x,t)$$

d.h. $\psi(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\psi(x) \quad (\psi(x,0) = \psi(x))$

- Freies Feld:

$$a(\psi)(t) = a\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\psi\right) =: \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi}(x)\, a(x,t)\, \mathrm{d}^3 x$$

- Dann erfüllt $a(x,t)$ die Schrödingergleichung als Distribution,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} a(x,t) = \hat{H} a(x,t)$$

Begriffe:

- "quantisierte" Schrödingergleichung
- Quantenfeld
- Feldquantisierung (auch "2. Quantisierung")