<u>Beweis</u>: Transformiere $H_\Lambda$ so, dass wir $E_\Lambda$ explizit ablesen können.

<u>Einschub</u>: Bogoliubov Transformation

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, dann ist

$$\Phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left( a(f) + a^*(\bar{f}) \right)$$

selbstadjungiert auf $D(N^{1/2})$ und erzeugt eine unitäre Trafo

$$U := e^{-i\Phi(f)} \quad \text{auf} \quad \mathcal{F}.$$

Weiterhin gilt für $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$, dass

$$U\, a(g)\, U^* = a(g) + \frac{i}{\sqrt{2}} \langle f, g \rangle$$

also

$$U\, a(x)\, U^* = a(x) + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{f}(x)$$

$$U\, a^*(x)\, U^* = a^*(x) - \frac{i}{\sqrt{2}} f(x)$$

Beweis $\underset{D(N^{1/2})}{(a(f))^*} = a^*(\bar{f})$ auf $D(N^{1/2})$

$$D(N^{1/2}) = \left\{ \psi \in \mathcal{F} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} n \, \|\psi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{3n})} < \infty \right\}$$

da $a^*(\bar{f})\psi \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \psi \in D(N^{1/2})$ falls $f \neq 0$

$$\| a^*(\bar f)\psi_n \| = n^{1/2} \underbrace{\|f\|}_{\neq 0} \cdot \|\psi_{n-1}\| .$$

$\Rightarrow$ $\phi(f)$ ist s.a.

Es gilt, dass $[e^{iA}, B] = e^{iA}[iA, B]$

falls $[A,[A,B]] = 0$ auf

Also auf $D(N^\infty) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(N^n)$

$$e^{-i\phi(f)} a(g) e^{i\phi(f)} = a(g) - i[\phi(f), a(g)]$$

$$= a(g) - \frac{i}{\sqrt{2}}[a^*(\bar f), a(g)]$$

$$= a(g) + \frac{i}{\sqrt{2}} \langle f, g \rangle$$

$\square$

# Gross-Transformation

$$\beta_\Lambda(k) = -\frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ik\cdot x}}{\left(\omega(k) + \frac{k^2}{2m}\right)\sqrt{\omega(k)}} \chi(\lambda \leq |k| \leq \Lambda) \quad \sim k^{-\frac{5}{2}}$$

$\Rightarrow \beta \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für $\lambda > 0$ und $\Lambda \leq \infty$

$$T_\Lambda := e^{-i\Phi(i\beta)}$$

$$\Rightarrow T_\Lambda \, a\left(\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{\omega(k)}} \frac{\chi(|k| \leq \Lambda)}{(2\pi)^{3/2}}\right) T_\Lambda^* =$$

$$= a(\cdots) + \frac{i}{\sqrt{2}} \langle i\beta, \cdots \rangle$$

$$= a(\cdot\cdot) - \frac{e}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3k \, \frac{\chi(\lambda \leq |k| \leq \Lambda)}{\left(\omega(k) + \frac{k^2}{2m}\right)\omega(k)}$$

$$= a(\dots) + \frac{\sqrt{2}}{e}(E_1 - E_2)$$

und analog

$$T_1\, a^*\left(\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{\omega(k)}}\ \frac{\chi(\dots)}{(2\pi)^{3/2}}\right) T_1^* =$$

$$= a^*(\dots) + \frac{\sqrt{2}}{e}(E_1 - E_2)$$

Weiterhin ist

$$T_1(-i\nabla_x)T_1^* = -i\nabla_x - [\,i\Phi(i\beta), -i\nabla_x\,]$$

$$= -i\nabla_x - \Phi(k\beta)$$

da $[\Phi(i\beta), [\Phi(i\beta), -i\nabla_x]] = [\Phi(i\beta), \Phi(ik\beta)]$

$$= i\,\mathrm{Im}\langle \beta, \varkappa\beta\rangle = 0$$

$$\Big( [\phi(f), \phi(g)] = i\,\mathrm{Im}\langle f, g\rangle \Big)$$

$$T_\Lambda H_\Lambda T_\Lambda^* = \frac{1}{2m}\Big(iD_x + \overbrace{\Phi(\varkappa\beta)}^{a\left(\frac{\varkappa\beta}{\sqrt{2}}\right) + a^*\left(\frac{\varkappa\beta}{\sqrt{2}}\right)}\Big)^2$$

$$+ \int d^3k\; \omega(k)\Big(a^*(k) + \frac{\beta(k)}{\sqrt{2}}\Big)\Big(a(k) + \frac{\bar{\beta}(k)}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$+ H_{I,\Lambda} + 2(E_\Lambda - E_\varkappa)$$

$$= -\frac{1}{2m}\Delta_x + H_f + \Big(iD_x(a+a^*) + (a+a^*)iD_x$$

$$+ a^2 + a^{*2} + 2a^*a + [a, a^*]\Big)/2m$$

$$+ a\Big(\frac{\omega\beta}{\sqrt{2}}\Big) + a^*\Big(\frac{\omega\beta}{\sqrt{2}}\Big) + H_{I,\Lambda} + 2(E_\Lambda - E_\varkappa)$$

$$+ \int d^3x \, \frac{\omega(x) |\beta(x)|^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2m}\Delta_x + H_f + \frac{1}{m}\left( i\nabla_x a + a^* i \nabla_x \right) + \frac{a^2 + a^{*2} + 2a^* a}{2m}$$

$$\left.\begin{aligned} &+ [i\nabla_x, a^*] + [a, i\nabla_x] \\ &+ a\left(\frac{\omega\beta}{\sqrt{2}}\right) + a^*\left(\frac{\omega\bar\beta}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}\right\} - \underline{H_{I,[\lambda,\Lambda]}}$$

$$+ \underline{H_{I,\Lambda}} + 2(E_\Lambda - E_\lambda) + \int \frac{\omega\beta^2}{2} + \frac{[a, a^*]}{2m} = -(E_\Lambda - E_\lambda)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2m}\Delta_x + H_f}_{H_0} + \frac{1}{m}\left( i\nabla_x a + a^* i\nabla_x \right) + \frac{a^2 + a^{*2} + 2a^* a}{2m}$$

$$+ H_{I,\lambda} + (E_\Lambda - E_\lambda) =: H_{ren,\Lambda} + E_\Lambda$$

**Problem:** $x\beta(x) \notin L^2$ für $\Lambda = \infty$

Aber: Man kann $H_{ren,\infty}$ über quadratische Form definieren:

$$\langle \psi, H_{ren\,\Lambda} \psi \rangle = \langle H_0^{1/2} \psi, H_0^{1/2} \psi \rangle + B_\Lambda(\psi,\psi)$$

mit

$$B_\Lambda(\psi,\psi) = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\Big( \langle (N+1)^{\frac{1}{2}} \psi, (N+1)^{-\frac{1}{2}} a^2 \psi \rangle + \langle a\psi, a\psi \rangle + \langle i\nabla\psi, a\psi \rangle \Big)$$
$$+ \langle \psi, H_{I,\Lambda} \psi \rangle$$

Lemma a) Für $\Lambda \leq \infty$ ist $B_\Lambda$ auf $\mathcal{D}(H_0^{1/2})$ definiert.

b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt ein $\lambda > 0$ und $b < \infty$

zz, dass

$$|B_\Lambda(\psi,\psi)| \le \varepsilon \langle \psi, H_0 \psi \rangle + b \langle \psi, \psi \rangle$$

<u>Idee:</u> Für $\psi \in D(H_0^{1/2})$ ist

$$\big(a(k\rho(k))\psi\big)_n (k_1, \dots, k_n) =$$

$$= (n+1)^{1/2} \int \underbrace{\frac{k\rho(k)}{\omega(k)^{1/4}}}_{\in L^2} \underbrace{\psi_{n+1}(k, k_1, \dots, k_n) \cdot \omega(k)^{1/4}}_{\in L^2}$$

$$\omega(k)^{1/4}\, \omega(k_1)^{1/4} \le \frac{1}{2}\left(\omega(k)^{1/2} + \omega(k_1)^{1/2}\right)$$

$\Rightarrow$ $B_\infty$ ist $\langle \psi, H_0 \psi \rangle$-Form beschränkt

$\Rightarrow \exists$ selbstadjungierter Operator $H_{ren,\infty}$

mit $D(H_{ren,\infty}) \subset D(H_0^{1/2})$ so, dass

$$\langle \psi, H_{ren,\infty} \psi \rangle = \langle \psi, H_0 \psi \rangle + B_\infty(\psi, \psi)$$

auf $D(H_{ren,\infty})$

$$\Rightarrow H_\infty = T_\infty^* H_{ren,\infty} T_\infty$$

<u>Bem:</u> Man zeigt noch $H_{ren,\Lambda} \to H_{ren,\infty}$
im starken Resolventen-Sinne
$\Rightarrow$ starke Konvergenz der Gruppen.