# Das Nelson Modell

Skalares Feld + geladenes Teilchen

**Klassisch**

$$\ddot{\phi}(x,t) = (\Delta - \mu^2)\,\phi(x,t) - e\,\varrho(x - q(t))$$

$$m\,\ddot{q}(t) = -e\,\nabla \phi_\varrho(q(t))$$

$$\phi_\varrho := \phi * \varrho$$

Hamiltonfkt:

$$H(q,p,\phi,\pi) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\int d^3x \left( |\pi(x)|^2 + |\nabla\phi(x)|^2 + \mu^2 |\phi(x)|^2 \right)$$

$$\pi = \dot{\phi} \qquad\qquad + e\,\phi_\varrho(q) \quad \leftarrow \text{lineare Kopplung}$$

Punktlimes $\varphi \to \delta$ geht schief, da die Selbstenergie divergiert: Sei $q = p = 0$, $\Pi = \dot{\phi} = 0$, dann ist die stationäre Lsg ($\widehat{=}$ Grundzustand) gegeben durch

$$(\Delta - \mu^2)\phi(x) = e\varphi(x) \Leftrightarrow -(k^2+\mu^2)\hat{\phi}(k) = e\hat{\varphi}(k)$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(k) = -\frac{e\hat{\varphi}(k)}{k^2+\mu^2}$$

$$\Rightarrow e\phi_\varphi(0) = -e^2\int d^3k \, \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{k^2+\mu^2}$$

Setze $\hat{\varphi}_\Lambda(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\chi(|k| \le \Lambda)$ ← UV cutoff

dann divergiert die Selbstenergie

$$e\,\phi_{\mathrm{kr}}(0) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int d^3k \; \frac{\chi(|k| \le \Lambda)}{k^2+\mu^2} \sim \Lambda \quad \lim \Lambda \to \infty$$

„Quantisiert": $\quad q \to x\,, \quad p \to -i\nabla_x$

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k \,\frac{1}{\sqrt{2\,\omega(k)}}\left(e^{ikx}\,a(k) + e^{-ikx}\,a^*(k)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left( a\left(\frac{e^{ik\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\omega(k)}}\right) + a^*\left(\frac{e^{-ik\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\omega(k)}}\right)\right)$$

$$=: \Phi\left(\frac{e^{ik\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\omega(k)}}\right)$$

mit $\omega(k) = \sqrt{k^2+\mu^2}$ als Dispersion

auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3_x) \otimes \mathcal{F}^s$

$(a(f))^* = a^*(f)$ oder $= a^*(\bar{f})$

$$\Phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a(f) + a^*(\bar{f})\right)$$

Wegen $\langle \psi, a(f)\psi \rangle = \langle a^*(\bar{f})\psi, \psi \rangle$

ist $\Phi(f)$ symmetrisch.

$\Rightarrow$ Hamiltonoperator

$$H = -\frac{1}{2m}\Delta_x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + e\Phi_f(x)$$

auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}^s \cong L^2(\mathbb{R}^3, \mathcal{F}^s)$

wobei

$$\phi_\varphi(x) = \Phi\left( \frac{\hat{\varphi}(k)\, e^{ik\cdot x}}{\sqrt{\omega(k)}} \right)$$

was für $\dfrac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ wohldefiniert ist.

Zur Erinnerung: $\quad H_f = \int d^3k\, \omega(k)\, a^*(k)\, a(k)$

oder $\quad (H_f \psi)_n (k_1, \dots, k_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega(k_j)\, \psi_n(k_1, \dots, k_n)$

<u>Schreibweise</u> $\quad (d\Gamma(f)\,\psi)_n = \sum_{j=1}^{n} f(k_j)\, \psi_n(k_1, \dots, k_n)$

also $\quad H_f = d\Gamma(\omega)$

Auch hier geht der Punktlimes schief, denn mit

$$\hat{\varphi}(k) = \hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \qquad \text{gilt}$$

$$\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \sim \frac{1}{\sqrt{|k|}} \notin L^2(\mathbb{R}^3)$$

$\Rightarrow$ Betrachte Nelson's Hamiltonian mit UV cutoff $\Lambda$:

$$H_\Lambda = \underbrace{-\frac{1}{2m}\Delta_x + H_f}_{=:H_0} + \underbrace{\overline{\Phi}\left(\frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{\omega(k)}} \cdot \frac{\chi(|k| \leq \Lambda)}{(2\pi)^{3/2}}\right)}_{H_{I,\Lambda}}$$

<u>Lemma 1</u> Für $\Lambda < \infty$ ist $H_\Lambda$ selbstadjungiert auf $D(H_0) = (H^2 \otimes \mathcal{F}) \cap (L^2 \otimes D(H_f))$

**Beweis** Mit Kato-Rellich ist zu zeigen, dass $a<1$ und $b<\infty$ existieren mit

$$\| H_{I,\Lambda} \psi \| \leq a \| H_0 \psi \| + b \|\psi\| \qquad \forall \psi \in D(H_0)$$

Zur Erinnerung: $(a(f)\psi)_n (x_1, \dots, x_n) =$

$$= (n+1)^{1/2} \int d^3x \; \bar{f}(x) \, \psi_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \| a(f)\psi \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int d^3x_1 \cdots \int d^3x_n \int d^3x \int d^3\tilde{x} \; f(x) \bar{f}(\tilde{x}) \, \overline{\psi_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n)} \, \psi_{n+1}(\tilde{x}, x_1, \dots, x_n)$$

$2 \times$ C.S.

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|f\|_{L^2}^2 \, \|\psi_{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|(n+1)^{1/2} \psi_{n+1}\|^2$$

$$= \|f\|^2 \cdot \|N^{1/2} \psi\|_{\mathcal{F}}^2$$

und analog $\|a^*(f)\psi\| \le \|f\| \, \|(N+1)^{1/2}\psi\|_{\mathcal{F}}$

$\Rightarrow$ Für $f \in L^2$ sind $a(f)$ und $a^*(f)$ auf $D(N^{1/2})$ definiert und es gilt

$$\langle \psi, a(f)\varphi \rangle = \langle a^*(\bar{f})\psi, \varphi \rangle \qquad \forall \psi \in D(N^{1/2})$$

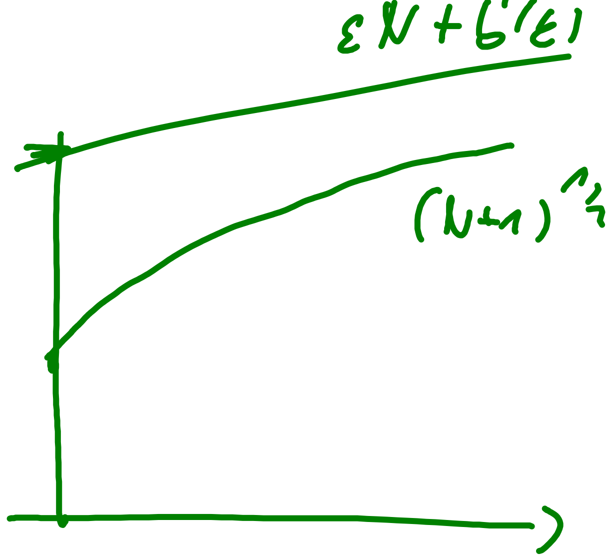
d.h. $\Phi(f)$ ist auf $D(N^{1/2})$ symmetrisch.

$$\Rightarrow \|H_{I,\Lambda}^{(x)}\psi\| \le C\,\|(N+1)^{1/2}\psi\| \le$$

$$\le C\left(\varepsilon\|N\psi\| + b'(\varepsilon)\|\psi\|\right)$$

$$\le \underbrace{\frac{C\varepsilon}{\sigma}}_{a}\|H_f\psi\| + \underbrace{Cb'(\varepsilon)}_{b}\|\psi\|$$

$\mu \neq 0$



$$N = d\Gamma(1) \qquad H_f := d\Gamma(\omega)$$

Das gilt auch für $\mu = 0$, dann aber mit

$$\|a(f)\psi\| \leq \left\|\frac{f}{\sqrt{|k|}}\right\| \cdot \|d\Gamma(\sqrt{|k|})\psi\|$$

$$\Longrightarrow \|\Phi(f)\psi\|^2 \leq \alpha \|H_f \psi\|^2 + \left(\frac{\|f/\sqrt{|k|}\|_{L^2}^4}{\alpha} + 2\right)\|\psi\|^2$$

$\forall \alpha > 0$ $\square$

Was passiert für $\Lambda \to \infty$?

<u>QM Selbstenergie</u>: Stationär $\Rightarrow$ Gesamtimpuls $= 0$

$$P := p + \int k\, a^*(k) a(k)\, d^3k = p + d\Gamma(k)$$
$$= p + P_f$$

Es gilt $[P, H_\Lambda] = 0 \Rightarrow$ unitäre Trafo auf

P-Darstellung

$U = e^{-i x \cdot P_f}$ verschiebt die Impulsvariable um $P_f$

d.h. $(U\Psi)_n(p, k_1, \dots, k_n) = \Psi_n\left(p + \sum_{j=1}^{n} k_j, k_1, \dots, k_n\right)$

$\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3_p) \otimes \mathcal{F}$

$$U^{-1} H U = \frac{1}{2}\big(\underbrace{P - P_f}_{p}\big)^2 + H_f + e\,\phi_\Lambda(0) = H(P)$$

$\Rightarrow$ Selbstenergie $\hat{=}$ Grundzustand $E_\Lambda$ von $H(0)$

Berechne $E_\Lambda$ in 2ter Ordnung Störungstheorie

$$H(0) = \underbrace{\frac{1}{2m} P_f^2 + H_f}_{H_0} + \underbrace{e\,\phi_\Lambda(0)}_{e H_I}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 + e E_1 + e^2 E_2 + \dots \\ \phi &= \phi_0 + e\phi_1 + \dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow H\phi = E\phi$$

$$E_0 = 0 \quad , \quad \phi_0 = \Omega$$

$$E_1 = \langle \Omega, \phi_\Lambda(0)\,\Omega \rangle = 0$$

$$\phi_1 = - H_0^{-1} \phi_\Lambda(0)\,\Omega ,$$

$$E_2 = -\langle \Omega, \phi_\Lambda(0)\, H_0^{-1} \phi_\Lambda(0)\,\Omega \rangle =$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \, \frac{\chi(|k| \le \Lambda)}{\omega(k)\left(\frac{1}{2m} k^2 + \omega(k)\right)} = \frac{E_\Lambda}{e^2}$$

$E_\Lambda \sim \ln \Lambda$ für $\Lambda \to \infty$

## Theorem (Nelson '64)

Es gibt einen eindeutigen s.a. Operator $H_\infty$ so, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\psi \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\Lambda \to \infty} e^{-it(H_\Lambda - N E_\Lambda)} \psi = e^{-itH_\infty} \psi$$

$H_\infty$ ist von unten beschränkt.