Effektive Gleichungen für die Teilchen im Nelson Modell

Klassisches Modell

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}(x,t) = \Delta_x \phi(x,t) - \sum_{j=1}^{N} \rho_j(x - q_j(t))$$

$$m_j \ddot{q}_j(t) = -\int_{\mathbb{R}^3} dx \, (\nabla\phi)(x,t)\,\rho_j(x - q_j(t))$$

$c \to \infty$: Poisson-Gleichung für das Feld:

$$\Delta_x \phi = \sum_{j=1}^{N} \rho_j(x - q_j(t))$$

$$\Rightarrow \phi(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\sum_j \int dy \, \frac{\rho_j(y - q_j(t))}{|x-y|}$$

$\curvearrowright$ Bewegungsgl. für Teilchen <u>ohne Feld</u>

$$m_j \ddot{q}_j(t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{N} \int \frac{\rho_j(x-q_j(t))\,\rho_l(y-q_l(t))}{|x-y|^3}(x-y)\,dx\,dy$$

BGL zu klass. Hamiltonfkt

$$H(q,p) = \sum \frac{1}{2m_j} p_j^2 - \sum_{j,l} \int dx\,dy\, \frac{\rho_j(x-(q_j-q_l))\,\rho_l(y)}{|x-y|}$$

Statt $c \to \infty$ betrachte $m_j = \frac{\tilde{m}_j}{\varepsilon^2}$, $t = \frac{\tilde{t}}{\varepsilon}$

also schwere Teilchen für lange Zeiten.

Für das klass. Modell sind dann die Limites $c \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ bis auf Reskalierung äquivalent.

Quantenmechanisches Modell

$$H_0^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f \quad \text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}$$

$$H_I(x) = \sum_{j=1}^{N} H_{I,j}(x_j) = \sum_{j=1}^{N} \int \frac{\hat{\varrho}_j(k)}{\sqrt{2|k|}} \left(e^{ikx_j} a(k) + e^{-ikx_j} a^*(k)\right)$$

$$=: \sum_{j=1}^{N} \Phi(|k|\, v(x,k))$$

$\cong$

$$H^\varepsilon = H_0^\varepsilon + H_I = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_x \otimes \mathbb{1} + H_{fib}(x)$$

$$\text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^{3N}, \mathcal{F})$$

Der Limes $\varepsilon \to 0$ in

$$i\varepsilon \frac{d}{dt}\psi(t) = \left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_x + H_{fib}(x)\right)\psi(t)$$

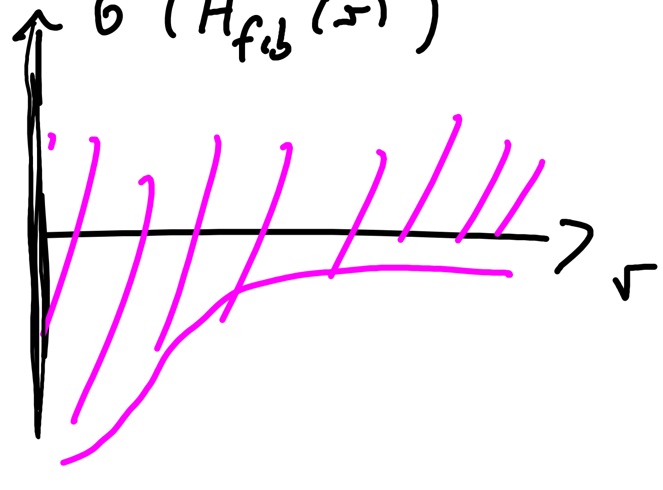
hat die gleiche Struktur wie B. O.

Das Spektrum von

$$H_{fib}(x) = \int |k|\, a^*(k)\, a(k)\, dk \; +$$

$$\int dk \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{g_j(k)}{\sqrt{2|k|}} \left(e^{ikx_j} a(k) + c.c. \right) \right)$$

hat die Form für $N=2$ und $r = |x_1 - x_2|$



wobei $\inf \sigma(H_{fib}(x)) = E(x) = \sum_{e<k=1}^{N} V_{ek}(x_e - x_k) + e_0$

mit $V_{ek}(z) = -\int dx\,dy \frac{\rho_e(x-z)\rho_k(y)}{4\pi|x-y|}$ ← Coulomb

und $e_0 = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} dx\,dy \frac{\rho_j(x)\rho_j(y)}{4\pi|x-y|}$ ← Selbstenergie

$E(x)$ ist Eigenwert von $H_{fib}(x)$

$\Leftrightarrow \int dk\, |v(x,k)|^2 < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^{3N}$

Derezinski 2003

Aber: $\int dk \frac{|\hat{\rho}_j(k)|^2}{|k|^3} = \infty$

Wir setzen $\hat{\rho}_j(k) = e_j \hat{\varphi}_\sigma(k)$

mit $\hat{\varphi}_\sigma(k) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} & \sigma \leq |k| \leq \Lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Für $\sigma > 0$ ist $E(x)$ EW von $H^\sigma_{fib}(x)$.

Dann liefert die Bogoliubov Trafo

$$U^\sigma_0(x) = e^{i\underline{\Phi}(iV(x,k))}$$

$$H^\sigma_{fib}(x) = U^\sigma_0(x)\, H_f\, U^{\sigma *}_0(x) + E^\sigma(x)$$

Proposition $\| e^{-iH^\varepsilon t/\varepsilon} - e^{-iH^{\varepsilon,\sigma} \frac{t}{\varepsilon}} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0^{1/2}, \mathcal{H})} \leq C H \frac{\sigma^{1/2}}{\varepsilon}$

Idee: Adiabatische St. für $H^{\varepsilon,\sigma}$ mit Fehlern, die logarithmisch in σ divergieren. Dann wähle $\sigma(\varepsilon)$ so, dass der Gesamtfehler minimiert wird.

Sei Q_M der Projektor auf den M-Teilchen Sektor des Fockraums und

$$P_M^{\sigma}(x) = U^{\sigma}(x)\, Q_M\, U^{\sigma}(x)^*$$

dann projiziert $P_M^{\sigma}(x)$ auf den UR mit „M realen Photonen" und der virtuellen Wolke und die Ladung.

Wir konstruieren einen modifizierten „dressing operator"

$$U^{\sigma,\varepsilon} : L^2(\mathbb{R}^{3N}, \mathcal{F}) \to L^2(\mathbb{R}^{3N}, \mathcal{F})$$

so, dass für

$$P_M^{\sigma,\varepsilon} = U^{\sigma,\varepsilon} (\mathbb{1} \otimes Q_M) \, U^{\sigma,\varepsilon\,*}$$

gilt

Thm: Adiabatische Invarianz von $P_M^{\sigma,\varepsilon}$

$$\left\| \left[e^{-iH^\varepsilon t/\varepsilon}, P_M^{\varepsilon,\sigma} \right] \chi(H^\varepsilon) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le$$

$$\le C \sqrt{M+1} \, |t| \, \varepsilon \sqrt{\ln \sigma^{-1}}$$

falls $\sigma(\varepsilon)$ erfüllt: $\sigma(\varepsilon)^{1/2}\varepsilon^{-3} \to 0$.

Interpretation:

$$\underbrace{L^2(\mathbb{R}^{3N})}_{\text{Elektron}} \otimes \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{Photon}} \xrightarrow{\mathcal{U}^{\varepsilon,\sigma *}} \underbrace{L^2(\mathbb{R}^{3N})}_{\text{dressed electron}} \otimes \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{„real photons"}}$$

Thm: Effektive Dynamik der „dressed electrons"

Sei $\omega \in \mathcal{J}_1\left(P_\pi^\varepsilon \chi(H^\varepsilon)\mathcal{H}\right)$

und $\omega_d := \mathrm{tr}_{\tilde{\mathcal{F}}}\left(U^\varepsilon \omega U^{\varepsilon *}\right) =: \mathrm{tr}_{\mathcal{F}_{real}}(\omega)$

die part. Spur über die „reellen Photonen"

also die red. „dressed electron" Dichtematrix.

Sei $\omega(t) = e^{-iH^{\varepsilon}t/\varepsilon}\,\omega\,e^{iH^{\varepsilon}t/\varepsilon}$

und $\omega_d(t) = e^{-iH_{eff}t/\varepsilon}\,\omega_d\,e^{iH_{eff}t/\varepsilon}$

dann gilt

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left(\omega(t)\left(\mathrm{Op}_\varepsilon^W(a)\otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}}\right)\right) =$$

$$\mathrm{tr}_{L^2(\mathbb{R}^{3N})}\left(\omega_d(t)\ \mathrm{Op}_\varepsilon^W(a)\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1} \cdot (|t|+|t|^2)\right)$$

Der effektive dressed electron Hamiltonian ist
infrarot regulär und hat die Form

$$H_{eff}^{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2 m_j^{\varepsilon}} \hat{p}_j^2 + E(x)$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{\ell \neq j} \int dk \, \frac{\hat{\rho}_\ell(k)^* \hat{\rho}_j(k)}{|k|^2} \Big[e^{ik(x_j - x_\ell)} (\kappa \cdot \hat{p}_\ell)(\kappa \cdot \hat{p}_j) + c.c. \Big]$$

Darwin Term

$$\kappa = \frac{k}{|k|}$$

mit $m_j^{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \tilde{e}_j}$ und

$$\tilde{e}_j = \frac{1}{4\pi} \int dx\,dy \; \frac{\rho_j(x)\,\rho_j(y)}{|x-y|}$$

E.B. Davies $c \to \infty$ für Nelson „weak coupling limit"

$$H^c = H_p \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma(c|k|) + \sqrt{c}\, H_I$$

Er zeigt

$$\lim_{c\to\infty} e^{-iH^c t}(\psi \otimes \Omega_F) = \left(e^{-i\left(-\frac{\Delta}{2}+E(x)\right)t}\psi\right)\otimes\Omega_F$$

Fock Vakuum

Effektive Dynamik für Teilchen <u>ohne</u> virtuelle Photonen