Quantisierung des komplexen skalaren Feldes: Antiteilchen

1. "klassische Feldtheorie" / "1-Teilchen-QM"

1.1 Schrödinger-Glg.

$$i\hbar\,\dot{\psi}(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right]\psi(x,t)$$

$$\rho(x,t) := \overline{\psi}(x,t)\,\psi(x,t)$$

Aufenthaltswahrsch.-Dichte (z. Zt. t)

Es gilt $\quad \dot{\rho} + \nabla\vec{j} = 0 \quad$ (Kontinuitätsglg.)

wobei $\quad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\overline{\psi}(\nabla\psi) - \psi(\nabla\overline{\psi})\right)$

Wahrscheinlichkeits-Strom(-Dichte)

(folgt aus Schrödinger-Glg.)

1.2 Klein-Gordon-Gleichung

$(\hbar = c = 1)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\phi = 0$$

bzw. $\ddot{\phi} - \Delta\phi + m^2\phi = 0$

Kontinuitätsglg? Geeignetes ρ und $\vec{j}$?

Wegen Forderung Lorentz-Inv.: Suche 4er-Vektor mit Nullkomp. ρ und Raumkomp $\vec{j}$

Klappt mit

$$\rho = \frac{i}{2m}\left(\bar{\phi}\dot{\phi} - \phi\dot{\bar{\phi}}\right)$$

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m}\left(\bar{\phi}(\nabla\phi) - \phi(\nabla\bar{\phi})\right)$$

bzw. $j^\mu = (\rho, \vec{j}) \Rightarrow$

$\partial_\mu j^\mu = 0$ bzw. $\dot{\rho} + \nabla \vec{j} = 0$

"Problem": ρ kann pos. und neg. werden

$\Rightarrow$ keine Interpretation als 1-Teilchen-QM

2 Fälle:

(i) ϕ reell: $\rho = 0, \vec{j} = 0$

(ii) ϕ komplex: $\underline{\rho}, \vec{j}$ bel. VZ

Interpretation als

Ladungsdichte ρ

(Ladungs-) Stromdichte $\vec{j}$

physikalische Anwendung für Pionen

(reelle KG: neutrale Teilchen (π^0))

komplexe KG: geladene Teilchen, aber zwei Sorte von Teilchen mit unterschiedlichen Ladungsvorzeichen (z.B. π^+, π^-)

bis hier: "klassische Feldtheorie"

2. Quantisierung

2.1 reelle skalare Feld (reelle KG-Gl.)

(Wdh)

Fourier-Entwicklung (klassisch)

$$\phi(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\underbrace{a(k)\, e^{-i\omega_k t + ikx}} + \underbrace{\bar{a}(k)\, e^{i\omega_k t - ikx}} \right]$$

ist das konj.-Komplexe von

da ϕ reell

und $\omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$

quantisiert

$$\phi(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k)\, e^{-i\omega_k t + ikx} + a^\dagger(k)\, e^{i\omega_k t - ikx} \right]$$

Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \, :\left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2 \phi^2 \right):$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^3} \int d^3k \; a^\dagger(k)\, a(k)$$

mit dieser Normierung (Ryder) hat

$$\frac{1}{\omega_k \; 4(2\pi)^3} a^\dagger(k)\, a(k) =: N(k)$$

Interpretation als Anzahlop. —

folgt aus

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 \, 2\omega_k \, \delta(k-k')$$

und diese wiederum aus ETCR

$$[\phi(x,t), \pi(x',t)] = i\,\delta(x-x')$$

wobei $\pi = \dot\phi$

2.2. Komplexes skalares Feld

Fourier-Entw.:
Amplitude nicht mehr $a(k)$ und $\bar{a}(k)$, sondern statt $\bar{a}(k)$ hat man eine weitere frei wählbare Amplitude.

quantisiert:

$$\phi(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k)\, e^{-i\omega_k t + ikx} + b^\dagger(k)\, \underline{e^{i\omega_k t - ikx}} \right]$$

$$\phi^\dagger(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[b(k)\, \underline{e^{-i\omega_k t + ikx}} + a^\dagger(k)\, e^{i\omega_k t - ikx} \right]$$

Hier bereits vorweggenommen: Interpretation von $b(b^\dagger)$ als Vernichter (Erzeuger)

behauptet wie folgt:
aus ETCR für ϕ, $\pi = \dot{\phi}$ folgt

$$[a(k), a^\dagger(k)] = [b(k), b^\dagger(k)]$$

$$H = \int d^3x \, :\left(\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + (\nabla\phi^\dagger)(\nabla\phi) + m^2 \phi^\dagger \phi \right):$$

$$= \dots$$

$$= \int d^3k \left[a^\dagger(k)\, a(k) + b^\dagger(k)\, b(k) \right]$$

$$Q = \int d^3x \left(\phi^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger \phi \right)$$

Ladung

vgl. mit Ladungsdichte ρ

$$= \dots$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega_k} \left[a^+(k)\, a(k) - b^+(k)\, b \right]$$

d.h. Teilchen, die durch b^+ erzeugt werden, haben

→ die gleiche Masse <u>aber</u>

→ entgegengesetzte Ladung

wie Teilchen, die durch a^+ erzeugt werden.

also Interpretation: **Antiteilchen**.