Quantisierung des Maxwell-Feldes

Seminar: Mathematische Grundlagen der QED

Sebastian Bölzle

06.11.2008

Ziele

Ziele des heutigen Vortrags:

- Beispiel für die Vorgehensweise einer Feld-Quantisierung in der Physik
- Quantisierung des freien Maxwell-Feldes (Strahlungsfeld), behandle Maxwell-Gleichungen im Vakuum
- Erzeuger- und Vernichter-Operatoren sowie Teilchendichte-Operator des Strahlungsfelds
- Erhalte damit Feldoperatoren des Vektorfeldes sowie normalgeordneten Hamilton-Operator

Gliederung

Setting

Heaviside-Lorentz Einheiten:

- Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{\hat{e}_0^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}$ mit $\hat{e}_0 = \sqrt{4\pi}\, e_0$
- nicht auf Bohrradius a_0 skaliert

Außerdem: $\hbar = c = 1$

Abwesenheit von Ladungen:

- Strom $\boldsymbol{j} = 0$
- Ladungsdichte $\rho = 0$

Elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$
Magnetfeld $\boldsymbol{B}$

Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

Antisymmetrischer Feldtensor:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gleichungen in neuer Form:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0,$$
$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Benutze 4er-Vektorpotential $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ mit

$$F^{\mu\nu} = \partial_\nu A^\mu - \partial_\mu A^\nu$$

A^μ erfüllt Bewegungsgleichung

$$\underbrace{\partial_\nu \partial^\nu}_{\Box} A^\mu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

A^μ dadurch nicht eindeutig bestimmt, denn

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda$$

mit beliebiger skalarer Funktion $\lambda(x)$, lässt $F^{\mu\nu}$ und damit $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ invariant.

Eichung

Wähle hier Strahlungs-Eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{Lorenz-Bedingung}$$

- Legt Eichung nicht fest, weitere Eichung mit λ möglich
- Reduziert die Freiheitsgrade von A^μ auf drei

Zusätzlich

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \qquad \text{Coulomb-Eichung}$$

- Reduziert die Freiheitsgrade von A^μ auf zwei
- Entspricht den beiden physikalisch relevanten Spin-Freiheitsgraden der Photonen

Dynamik

Strahlungs-Eichung ergibt die freie d'Alembert-Gleichung als Dynamik:

$$\Box A^\mu = 0$$

Beachte: freies Maxwell-Feld ohne externe Quellen, Wahl $A^0 = 0$ möglich

Lösungsansatz:

$$A^\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{k_0}} \sum_{\lambda=1}^{2} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \epsilon_\lambda^\mu(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \epsilon_\lambda^\mu(\boldsymbol{k})^* a_\lambda^*(\boldsymbol{k}) \right)$$

wobei Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ mit $k_0 = |\boldsymbol{k}|$

Eigenschaften des Polarisationsvektors $\epsilon_\lambda^\mu(\boldsymbol{k})$:

- $\epsilon_\lambda^0(\boldsymbol{k}) = 0$, damit $A^0 = 0$ erfüllt
- $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k}) = 0$, wegen $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, d.h. zwei Polarisationsrichtungen $\lambda = 1, 2$
- $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\lambda'}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}$ orthonormal
- $\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\lambda^i(\boldsymbol{k}) \epsilon_\lambda^j(\boldsymbol{k}) = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\boldsymbol{k}^2}$, orthogonales Dreibein von $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\boldsymbol{k})$

Polarisationsvektor gewährleistet

- Vektoreigenschaft des Vektorpotentials
- zwei physikalisch relevante Polarisationsrichtungen des Photons

Im Fall der alleinigen Lorenz-Eichung hätte man vier Polarisationsrichtungen erhalten.

Quantisierungsvorschrift

Im Unterschied zur klassischen Feldtheorie sind die Amplituden $a_\lambda(\boldsymbol{k})$ und $a_\lambda^*(\boldsymbol{k})$ keine komplexen Zahlen, sondern Operatoren.

Auf Grund der statistischen Eigenschaften der Planck-Strahlung und des Spin-Statistik-Theorems gehorchen Photonen als Quanten des Strahlungsfeldes der Bose-Einstein Statistik.

Postuliere bosonische Kommutator-Relationen:

$$\left[a_\lambda(\boldsymbol{k})\,,\,a_{\lambda'}^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

$$\left[a_\lambda(\boldsymbol{k})\,,\,a_{\lambda'}(\boldsymbol{k}')\right] = \left[a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k})\,,\,a_{\lambda'}^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = 0$$

Was bedeutet das Ganze nun?

Hamilton-Dichte

Für das elektrische und magnetische Feld folgt mit dem Helmholtz-Theorem:

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Lagrange-Dichte des freien Maxwell-Feldes:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2 \right)$$

Berechne daraus Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j}}_{\Pi^j} \dot{A}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{A}}^2 + (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \right)$$

Hamilton-Operator

Daraus folgt die Hamilton-Funktion (nutze Lösungsansatz für A^μ):

$$H = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{H} = \ldots = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \, \frac{k_0}{2} \left(a_\lambda^*(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + a_\lambda(\boldsymbol{k}) a_\lambda^*(\boldsymbol{k}) \right)$$

Quantisiere mittels Bose-Kommutator, nutze Normalordnung und erhalte Hamilton-Operator :

$$H = : \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \; k_0 \left(\frac{a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + a_\lambda(\boldsymbol{k}) a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k})}{2} \right) :$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \; k_0 \left(a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) \right)$$

Prüfe, ob $N_\lambda(\boldsymbol{k}) := a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k})$ Eigenschaften eines Teilchendichte-Operators besitzt.

Teilchendichte-Operator

Eigenschaften von $N_\lambda(\boldsymbol{k})$:

- $\left[N_\lambda(\boldsymbol{k})\,, N_{\lambda'}(\boldsymbol{k}')\right] = 0$ also kann ein simultane Basis gewählt werden aus Eigenvektoren $|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle$ von $N_\lambda(\boldsymbol{k})$ mit Eigenwerten $n_\lambda(\boldsymbol{k})$
- $\left[N_\lambda(\boldsymbol{k})\,, a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k})\right] = a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k})\,,\ \left[N_\lambda(\boldsymbol{k})\,, a_\lambda(\boldsymbol{k})\right] = -a_\lambda(\boldsymbol{k})$

Damit lässt sich berechnen:

$$N_\lambda(\boldsymbol{k})a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle = \left(n_\lambda(\boldsymbol{k})+1\right)a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle$$
$$N_\lambda(\boldsymbol{k})a_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle = \left(n_\lambda(\boldsymbol{k})-1\right)a_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle$$

Folglich sind auch $a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle$ und $a_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle$ Eigenvektoren von $N_\lambda(\boldsymbol{k})$ mit um eins erhöhtem, bzw. um eins erniedrigtem Eigenwert.

Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned}\|a_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle\| =&\langle n_\lambda(\boldsymbol{k})|a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k})a_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle\\ =&n_\lambda(\boldsymbol{k})\langle n_\lambda(\boldsymbol{k})|n_\lambda(\boldsymbol{k})\rangle > 0 \Rightarrow n_\lambda(\boldsymbol{k}) \geq 0\end{aligned}$$

Aber: $a_\lambda(\boldsymbol{k})$ erniedrigt den Eigenwert und wiederholte Anwendung würde $n_\lambda(\boldsymbol{k}) \geq 0$ verletzen.

Existenz eines Grundzustands $|0\rangle$ mit $a_\lambda(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$

Also besitzt $N_\lambda(\boldsymbol{k}) := a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k})a_\lambda(\boldsymbol{k})$ alle nötigen Eigenschaften eines Teilchendichte-Operators.

$a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k})$ und $a_\lambda(\boldsymbol{k})$ nennt man Erzeuger- und Vernichter-Operatoren für die Quanten des Maxwell-Feldes, die Photonen.

Kommutator der Feldoperatoren

Für die Feldoperatoren bzw. konjugierten Variablen $\Pi^j = -\dot{A}^j$ und A^j gilt:

$$\left[-\dot{A}^i(x)\,,\;A^j(x')\right]_{x^0=x'^0} = \ldots = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\boldsymbol{k}^2}\right)$$

Beachte:

- unterschiedliche Kommutator-Relation im Vergleich zu herkömmlicher Heisenberg-Quantisierung!
- $\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\boldsymbol{k}^2}\right)$ anstatt δ^{ij}
- gewährleistet richtige Summierung über die Helizitäten des Photons (vgl. Eigenschaften des Polarisationsvektors.)

Energie und Normalordnung

Hamilton-Operator enthält einen Term divergierender Nullpunktsenergie:

- läßt sich aber ohne weitere physikalische Konsequenzen abziehen (willkürlicher Nullpunkt der Energie)
- entspricht einer Normalordnung des Operators

$$H = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \, \frac{k_0}{2} \left(a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + \underbrace{a_\lambda(\boldsymbol{k}) a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k})}_{=a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + 1} \right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \, k_0 \left(a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2} \right) \qquad \text{Abzug der Nullpunktsenergie}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \, k_0 \left(a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\lambda(\boldsymbol{k}) \right) \qquad \text{identisch mit Normalordnung}$$

Zusammenfassung

Vorgehensweise für Quantisierung:

- Aufstellen der Feldgleichung(en) und Einführung von Kommutator-Relationen für Operatoren im Lösungsansatz.
- Erhalte dadurch Erzeuger- und Vernichter-Operatoren, sowie Feldoperatoren und Hamilton-Operator in quantisierter Form und letztlich Teil einer neuen Theorie.

- Ausblick
  - Energie Cut-Offs
  - Quantisierung des Dirac-Feldes mit Fermi-Dirac-Statistik

Literatur I

- Ryder, L.:
  Quantum Field Theory.
  Cambridge University Press, 2nd ed., 1996.
- Schwabl, F.:
  Advanced Quantum Mechanics.
  Springer, 3rd ed., 2000.
- Scheck, F.:
  Theoretische Physik 4.
  Springer, 2. Aufl., 2007.