Glatte Feshbach-Abbildungen und Renormierungsgruppen

Hans-Michael Stiepan

15. Januar 2009

Modell

Wir betrachten ein einfaches Modellsystem:

- Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}$
- bosonischer Fockraum $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n L^2(\mathbb{R}^3)^{\otimes n}$
- Hamiltonian

$$H = H_0 + W_g = H_{\mathrm{el}} + H_f + W_g = \varepsilon \sigma_3 + \int d^3k \; a^*(k)\omega(k)a(k) + W_g$$

- Wechselwirkungsterm

$$W_g = g \int \frac{\kappa(k) d^3k}{|k|^{1/2}} \left(\sigma^- a^*(k) + \sigma^+ a(k)\right)$$

Feshbachsche Projektionsmethode

Schurkomplement für Matrizen:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

In einem beliebigen Hilbertraum $\mathcal{H}$ legt dies nahe folgende Abbildung zu betrachten:

- Hamiltonian $H = H_0 + W$ mit einer Projektion P, $[P, H_0] = 0$.
- $P^\perp(H - z)P^\perp$ sei invertierbar in $\mathrm{Ran}(P^\perp)$.
- Feshbach-Abbildung

$$\mathcal{F}_P(H - z) := P(H - z)P - PHP^\perp \left(P^\perp(H - z)P^\perp\right)^{-1} P^\perp HP$$

Renormierungsgruppen

Betrachte Sequenz von Projektoren $P^{(n)}$.
Folge von Feshbach-Paaren:

$$\tau \circ F_{P^{(n-1)}}\left(H^{(n-1)}, W^{(n-1)}\right) = \left(H^{(n)}, W^{(n)}\right)$$

Untersuche Fixpunkte dieser *Renormierungsabbildung*.
Problem: In Anwendungen in der QED wählt man typischerweise

$$P = \chi_{[0,\rho]}(H_0).$$

Zur Untersuchung von Fixpunkten benötigen wir jedoch differenzierbare Abhängigkeit von Parametern.

Definition

Seien $\chi, \bar{\chi}$ kommutierende nichtverschwindende Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, die $\chi^2 + \bar{\chi}^2 = 1$ erfüllen. Unter einem *Feshbach-Paar* für χ verstehen wir ein Paar von abgeschlossen Operatoren (H, T) mit gleicher Domäne

$$H, T : D(H) = D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

sodass $H, T, W := H - T$ und die Operatoren

$$W_\chi := \chi W \chi, \quad H_\chi := T + W_\chi,$$

$$W_{\bar{\chi}} := \bar{\chi} W \bar{\chi}, \quad H_{\bar{\chi}} := T + W_{\bar{\chi}},$$

folgende Annahmen erfüllen:

1. $\chi T \subset T\chi$ und $\bar{\chi}T \subset T\bar{\chi}$,
2. $T, H_{\bar{\chi}} : D(T) \cap \mathrm{Ran}(\bar{\chi}) \to \mathrm{Ran}(\bar{\chi})$ sind bijektiv mit beschränkten Inversen.
3. $\bar{\chi} H_{\bar{\chi}}^{-1} \bar{\chi} W \chi : D(T) \to \mathcal{H}$ ist beschränkt.

Definition (Glatte Feshbach-Abbildung)

Die Feshbach-Abbildung $(H, T) \mapsto F_\chi(H, T)$ ist gegeben durch

$$F_\chi(H, T) := H_\chi - \chi W \bar{\chi} H_{\bar{\chi}}^{-1} \bar{\chi} W \chi.$$

Isospektrale Abbildung von $(H, D(H))$ nach
$(F_\chi(H, T), D(H) \cap \mathrm{Ran}(\chi))$
Definiere

$$Q_\chi := \chi - \bar{\chi} H_{\bar{\chi}}^{-1} \bar{\chi} W \chi$$

$$Q'_\chi := \chi - \chi H_{\bar{\chi}}^{-1} \bar{\chi} W \bar{\chi}$$

Theorem

Sei (H, T) ein Feshbach-Paar für χ. Dann gilt:

1. *Sei* $\mathrm{Ran}(\chi) \subset V \subset \mathcal{H}$ *ein Unterraum mit*

   $$T : D(T) \cap V \to V, \quad \bar{\chi} T^{-1} \bar{\chi} V \subset V.$$

   Dann ist H beschränkt invertierbar genau dann, wenn $F_\chi(H, T) : D(T) \cap V \to V$ beschränkt invertierbar in V ist.

2. *Die Abbildungen*

   $$\chi : \mathrm{Ker}(H) \to \mathrm{Ker} F_\chi(H, T),$$

   $$Q_\chi : \mathrm{Ker} F_\chi(H, T) \to \mathrm{Ker}(H),$$

   sind Isomorphismen und invers zueinander.

Banachraum von Hamiltonians

Idee: Wende Feshbach-Abbildung wiederholt an und studiere den Grenzwert des Hamiltonians.

- Führe geeigneten Banachraum für Hamilton-Operatoren ein!
- Betrachte zunächst $\mathcal{H}_{\mathrm{red}} = \mathrm{Ran}\mathbb{1}[H_f < 1]$.
- Studiere $H \in \mathcal{B}[\mathcal{H}_{\mathrm{red}}]$ der Form

$$H(w) = T[H_f] + W(w) - E \cdot \mathbb{1}.$$

  $T[H_f] \in \mathcal{B}[\mathcal{H}_{\mathrm{red}}]$ wird definiert über Funktionalkalkül.
- Definiere geeigneten Banachraum $\mathcal{W}'$ von erlaubten WW-Termen mit $H : \mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{B}[\mathcal{H}_{\mathrm{red}}]$ über eine Folge von Funktionen w_{mn}.

Die Renormierungsabbildung

Die Renormierungsprozedur besteht aus mehreren Schritten:

1. Projektion auf den entsprechenden elektronischen Unterraum
2. komplexe Deformation $\Rightarrow$ neuer Banachraum von analytischen Familien $\mathcal{W}$
   2.1 Reduzierung der Freiheitsgrade des Feldes durch eine glatte Feshbach-Abbildung
   2.2 unitäre Skalentransformation
   2.3 analytische Transformation des spektralen Parameters

Komplexe spektrale Deformation

Betrachte ungestörten Hamiltonian:

- ac-Spektrum $\sigma = [-\epsilon, \infty)$
- Zwei Eigenwerte:
  - Grundzustand mit Energie $-\epsilon$
  - eingebetteter Eigenwert bei ϵ

Durch Störung verschwindet der eingebettete Eigenwert, aber immer noch Resonanz.

$\Rightarrow$ Untersuche daher $H(z) := \Gamma_{\mathrm{e}^{\theta}} H \Gamma_{\mathrm{e}^{-\theta}}$ mit $\theta = r + \mathrm{i}\delta$, $\Gamma_\rho = \rho^{\mathrm{i}A}$ und

$$A = \frac{\mathrm{i}}{2} \int d^3k \; a^*(k) \, (k \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot k) \, a(k).$$

Auf das Feshbach-Paar $(H, T[H_f - E])$ wenden wir die Abbildung mit

$$\chi_\rho[H_f] := \sin\left[\frac{\pi}{2}\theta(\frac{H_f}{\rho})\right],$$

$\theta \in C_0^\infty([0,1];[0,1])$ mit $\theta \equiv 1$ auf $[0, 3/4)$.

Einschränkung auf Feldenergien, die kleiner sind als ρ. Durch Skalentrafo

$$S_\rho(H) := \frac{1}{\rho}\Gamma_\rho H \Gamma_\rho^*$$

bekommen wir den ursprünglichen Energiebereich zurück.

- Störung wird kleiner um Faktor ρ^{μ}, $\mu > 0$.
- Spektraler Parameter wird transformiert wie $\frac{1}{\rho}E$.
- Daher weitere Transformation des spektralen Parameters mit E_ρ, $z \mapsto \frac{1}{\rho}E[z]$.

$\Rightarrow$ Renormierungstransformation

$$R_\rho^H(w)[z] := S_\rho\left(F_{\chi_\rho[H_f]}\left(H\left(w\left[E_\rho^{-1}(z)\right]\right), W_{0,0}\left(w\left[E_\rho^{-1}(z)\right]\right)\right)\right)$$

Theorem

1. $\epsilon_\downarrow(g) := \inf \sigma(H_g)$ *ist ein einfacher Eigenwert. Es gibt konvergierende Algorithmen um diesen und den zugehörigen Eigenvektor* $\psi_\downarrow(g)$ *zu bestimmen. Weiter gilt*

$$\lim_{g\to 0} \epsilon_\downarrow(g) = -\epsilon, \quad \lim_{g\to 0} \psi_\downarrow(g) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \Omega.$$

2. *Seien* Ψ, Φ *ganze Vektoren für A. Dann können wir die Funktion von der oberen Halbebene*

$$\langle \Psi, (z - H_g)^{-1} \Phi \rangle$$

analytisch über den Schnitt $[\epsilon_\downarrow(g), \infty)$ *in die untere Halbebene fortsetzen. Dort hat sie eine Singularität (Resonanz) an der Stelle* $\epsilon_\uparrow(g)$*.*

Zusammenfassung

- Durch die Feshbach-Abbildung haben wir die Möglichkeit, die Freiheitsgrade von Systemen zu reduzieren. Dies erlaubt es uns, Störungen zu betrachten, in denen es keine 'gap' gibt.
- Diese Abbildung erlaubt es uns eine Renormierungstransformation für bestimmte Modell-Hamiltonians in der QED zu definieren. Damit erhalten wir:
  - Das betrachtete Modellsystem hat einen Grundzustand und absolut kontinuierliches Spektrum oberhalb.
  - Aus dem eingebetteten Eigenwert ϵ wird nach Hinzunahme der Störung eine Resonanzenergie.