

# Mathematik I

## für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 8 (Abgabe am 05.12.2011)

**Aufgabe 38** (6+2+4+4 = 16 Punkte)

Ein Mischwald bestehe im Jahr  $t$  aus  $L_t$  Laubbäumen und  $N_t$  Nadelbäumen. Wir nehmen an, dass jedes Jahr 4% der Laubbäume und 13% der Nadelbäume absterben, und dass an den frei werdenden Plätzen sofort neue Bäume nachwachsen, und zwar in 11% der Fälle Laubbäume und in 89% der Fälle Nadelbäume. Entsprechend ergibt sich das folgende Populationsmodell:

$$\begin{pmatrix} L_{t+1} \\ N_{t+1} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} L_t \\ N_t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad W \in \mathcal{M}(2, 2).$$

- a) Bestimmen Sie die  $2 \times 2$ -Matrix  $W$ .

Der Mischwald bestehe im Jahr 2011 aus 12 000 Laubbäumen und 10 000 Nadelbäumen.

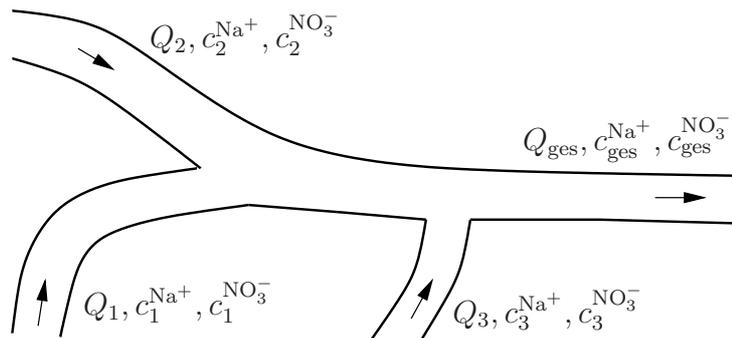
- b) Wieviele Nadelbäume werden es im Jahr 2013 sein?  
 c) Wieviele Laubbäume waren es im Jahr 2009?  
 d) Angenommen, nach vielen Jahren stellt sich ein stationärer Zustand ein, d.h. die Anzahl der Laubbäume und die Anzahl der Nadelbäume bleibt von Jahr zu Jahr konstant. Wie hoch ist dann der Anteil der Nadelbäume?

**Aufgabe 39** (10+14 = 24 Punkte)

Sie haben in einem Flussabschnitt mit drei Zuflüssen an verschiedenen Stellen die Konzentration von Natrium und Nitrat gemessen (in mg/l):

$j$	1	2	3	ges
$c_j^{\text{Na}^+}$	150	100	50	100
$c_j^{\text{NO}_3^-}$	15	60	45	45

Außerdem haben Sie die minütliche Abflussmenge,  $Q_{\text{ges}} = 8700 \text{ m}^3/\text{min}$ , bestimmt.



- a) Bestimmen Sie die minütlichen Zuflussmengen  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$ . Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem (LGS) auf, bringen Sie es auf Zeilen-Stufen-Form, und geben Sie die Lösung an.  
 b) Nun entdecken Sie oberhalb des Zuflusses 3 einen weiteren Zufluss. Dort messen Sie die Konzentrationen  $c_4^{\text{Na}^+} = 50 \text{ mg/l}$  und  $c_4^{\text{NO}_3^-} = 15 \text{ mg/l}$ . Wie groß kann die minütliche Zuflussmenge  $Q_4$  höchstens sein? (Stellen Sie wieder ein LGS auf, bringen Sie es auf Zeilen-Stufen-Form, und geben Sie zunächst alle Lösungen an.)

HINWEIS: Es ist sinnvoll, statt  $Q_j$  die Variablen  $x_j := Q_j/Q_{\text{ges}}$  zu verwenden.

**Aufgabe 40**

(6 Punkte)

Das LGS  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat eine eindeutige Lösung. Mit MATLAB erhalten Sie diese wie folgt:

*Beispiel 9:* (exaktes Lösen eines LGS)

```
>> A=[3 2 1; 1 4 3; 1 1 1]
>> b=[2; 3; 1]
>> x=A\b
```

Das LGS  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 100 \\ 15 & 60 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 45 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung. (Warum? Zeigen Sie das!). Dennoch erhalten Sie mit

*Beispiel 10:* (näherungsweise Lösen eines LGS)

```
>> A=[150 100; 15 60; 1 1]
>> b=[100; 45; 1]
>> x=A\b
```

ein Ergebnis  $\vec{x}$ . Wie erkennen Sie an der Ausgabe von  $A*\vec{x}$ , dass dieses  $\vec{x}$  keine Lösung des LGS ist? Tatsächlich handelt es sich um eine Näherungslösung, für die  $|A\vec{x} - \vec{b}|$  möglichst klein wird.

**Aufgabe 41**

(2+6+2 = 10 Punkte)

In Aufgabe 37 haben Sie herausgefunden, dass Ihre Lachspopulation aussterben wird. Um dem entgegen zu wirken, erwägen Sie besondere Schutzmaßnahmen für die Jungtiere sowie den Ausbau von Fischtreppe (um die Laichwanderung zu erleichtern). Durch eine der Maßnahmen würde sich  $\mu$  auf 90% erhöhen, durch die andere  $s_1$  auf 10%.

- Welche Maßnahme wäre für welche Parameteränderung verantwortlich?
- Untersuchen Sie mit MATLAB jeweils, wie sich die Population entwickeln würde, wenn Sie (i) nur die erste, (ii) nur die zweite oder (iii) beide Maßnahmen durchführen würden. Beschreiben Sie jeweils auch in Worten, was mit den Lachsen geschieht.
- Welche Maßnahme(n) empfehlen Sie (mit kurzer Begründung)?