

Mathematik I

für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 14 (Abgabe freiwillig am 30.01.2012)

Aufgabe 64 (Höhenformel)

Wir möchten den Luftdruck p als Funktion der Höhe z (in km über Meereshöhe) für die Troposphäre ($z \leq 15$) und für die Stratosphäre ($15 < z \leq 50$) bestimmen. Als Funktion von z erfüllt der Luftdruck die Differentialgleichung

$$p'(z) = -\frac{Mg}{RT(z)}p(z).$$

Dabei ist $M = 0,029$ kg/mol die mittlere molare Masse von Luft, $g = 9,81$ N/kg die Erdbeschleunigung, $R = 8,31$ N m/(K mol) die ideale Gaskonstante und $T(z)$ die Lufttemperatur in der Höhe z .

Wir nehmen folgenden Temperaturverlauf an: Bei $z = 0$ betrage die Temperatur $20^\circ\text{C} = 293$ K. Innerhalb der Troposphäre ($z \leq 15$) falle die Temperatur linear ab, jeweils um $6,5$ K pro Kilometer. Zu Beginn der Stratosphäre ($15 < z \leq 30$) sei die Temperatur konstant. Innerhalb der Ozonschicht ($30 < z \leq 50$) erwärme sie sich wieder linear und betrage in 50 km Höhe $0^\circ\text{C} = 273$ K.

Der Luftdruck auf Meereshöhe betrage 1013 mbar.

- a) Zeichnen Sie den Graph des Temperaturverlaufs $T(z)$ für $0 \leq z \leq 50$ (z in km) und geben Sie die Funktion in der Form

$$T(z) = \begin{cases} \dots, & 0 \leq z \leq 15 \\ \dots, & 15 \leq z \leq 30 \\ \dots, & 30 \leq z \leq 50 \end{cases} \quad \text{an.}$$

- b) Bestimmen Sie nun den Druckverlauf $p(z)$ für $0 \leq z \leq 50$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
- Lösen Sie zunächst die Differentialgleichung für $p(z)$ im Bereich $0 \leq z \leq 15$.
 - Wählen Sie die freie Konstante so, dass Sie den richtigen Druck auf Meereshöhe erhalten.
 - Bestimmen Sie den Luftdruck in 15 km Höhe.
 - Lösen Sie die Differentialgleichung für $p(z)$ im Bereich $15 \leq z \leq 30$.
 - Wählen Sie die freie Konstante so, dass Sie den richtigen Druck in 15 km Höhe erhalten.
 - Wiederholen Sie die Schritte analog für den Bereich $30 \leq z \leq 50$.

HINWEIS: Es ist evt. sinnvoll, die Größe $\alpha := Mg/R$ einzuführen.
Welchen Wert hat α in K/km?

Aufgabe 65

Sei $N(t)$ die Anzahl der Individuen einer Fischpopulation zur Zeit t (in Jahren). Seien die (pro Kopf-) Geburtenrate $g > 0$ und die Sterberate $s > 0$ Konstanten. Dann gilt

$$\frac{dN}{dt} = gN - sN.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet $N(t) = e^{(g-s)t}N(0)$ (exponentielles Wachstum), mit beliebigem $N(0)$. Die Größe $g - s$ heißt auch *Wachstumsrate*. (Vergleichen Sie auch mit Aufgabe 18.)

Der Mensch entnehme nun im Zeitintervall $[t, t+dt]$ die Menge $a(1 + \cos(2\pi t))N(t)$, $a > 0$, z.B. durch je nach Jahreszeit unterschiedlich intensives Fischen (wobei der Ertrag immer proportional zur Populationsgröße ist). Die Population erfüllt nun also die DGL

$$\dot{N} = gN - sN - a(1 + \cos(2\pi t))N. \quad (*)$$

a) Zeigen Sie, dass

$$N(t) = be^{wt - v \sin(2\pi t)} \quad (+)$$

die DGL löst, wenn man nur w und v geeignet wählt, d.h. geben Sie w und v als Funktion von g, s und a an, so dass (+) eine Lösung von (*) ist.

- b) Welche Werte darf dabei b annehmen? Welche anschauliche Bedeutung hat b ?
- c) Welche Beziehung muss zwischen g, s und a erfüllt sein, damit die Population um einen Mittelwert oszilliert aber langfristig weder wächst noch schrumpft?
- d) Wie groß wird die Population dann maximal und minimal (als Funktion von b, g, s und a) und zu welchen Zeiten? Vergleichen Sie diese Zeiten mit den Zeiten größter und kleinster Fischerei-Intensität (Skizze).

Aufgabe 66 (Populationsmodell von Lotka und Volterra)

Wir simulieren die Entwicklung zweier Tier-Populationen N (Beute) und P (Räuber) als Funktion der Zeit t . $N(t), P(t)$ sind die Anzahlen der jeweiligen Individuen (in Millionen) zum Zeitpunkt t . Lotka und Volterra schlugen unabhängig voneinander folgende gekoppelten Differenzialgleichungen als Modell der zeitlichen Entwicklung vor:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP), \quad \frac{dP}{dt} = P(cN - d). \quad (\text{A})$$

Dabei sind a, b, c, d positive Konstanten. Das Modell (A) beruht auf folgenden Annahmen: Pro Beutetier und Zeiteinheit ist die Anzahl der Geburten minus natürliche Todesfälle durch a gegeben, während die Anzahl bP der Todesfälle durch Gefressenwerden proportional ist zur Anzahl der Raubtiere P . Pro Raubtier und Zeiteinheit vermehren sich die Raubtiere um $cN - d$; dieser Betrag wächst mit der verfügbaren Nahrung und würde in Abwesenheit jeglicher Beute $-d$ betragen.

Stellen Sie N und P als Funktion der Zeit ($t \in [0, 50]$) in einem Diagramm graphisch dar mit $a = 0.5, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.6$ für die drei verschiedenen Anfangswerte $(N(0), P(0)) = (1, 0.5), (3, 0.6)$ und $(3, 2)$. Gehen Sie dazu wie im untenstehenden Beispiel vor. Dabei verwenden wir einen speziellen Matlab-Befehl zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen, einen sogenannten *Integrator* oder *Solver*.

Plotten Sie außerdem für jeden der 3 genannten Anfangswerte die so errechneten Wertepaare $(N(t), P(t))$ in ein weiteres Diagramm, das die *Bahn* des Verlaufs in der NP -Ebene (dem sogenannten *Zustands-* oder *Phasenraum*) zeigt. (Im untenstehenden Beispiel würde der entsprechende Befehl `plot(y(:,1),y(:,2))` lauten.)

Beispiel 11: Zu lösen seien die gekoppelten Differenzialgleichungen (gedämpftes Pendel)

$$\frac{dy_1}{dt} = -\beta y_1 + y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\omega^2 y_1, \quad (\text{B})$$

mit bestimmten Koeffizienten β und ω , $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = .5$. Wir schreiben nun eine Funktion `pendel.m`, die diese Differenzialgleichung enthält:

```
function[dy]=pendel(t,y)
dy=zeros(2,1);
omega=2;
beta=0.1;
dy(1)=y(2)-beta*y(1);
dy(2)=-omega^2*y(1);
end
```

Anschließend geben wir folgende Befehle direkt ein:

```
> t=0:.1:50;
> y0=[1; .5];
> [t,y]=ode45('pendel',t,y0);
> plot(t,y);
```

`ode45('pendel',t,y0)` berechnet die Lösungen y_i von (B) numerisch. Die Ausgabe erfolgt in Form einer Matrix y , deren i -te Spalte die Funktionswerte von $y_i(t)$ im Intervall $[0, 50]$ enthält.