

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Mehrdimensionale Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

20. Januar 2014



Partielle Ableitungen

Richtungsableitungen

Totale Ableitung

Tangentialebene

∇ : Totale Ableitung / Gradient

Richtungsableitungen und Gradient

Zweite Ableitungen

Hesse-Matrix

Lokale Extrema



Halten wir in der Funktion $f(x, y)$, d.h. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die Variable y fest ("behandeln y als Zahl") und leiten dann (nach x) ab, so bilden wir die **partielle Ableitung von f nach x** ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Bemerkung: $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Umgekehrt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Beispiel: *Calc-zilla*

<http://abstrusegoose.com/26>



- ▶ $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$; partielle Ableitung nach x_1 ist
Ableitung **in Richtung von** $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{h}$$


- ▶ **Richtungsableitungen** in beliebiger Richtung:
 $\vec{e} \in \mathbb{R}^d$ mit $|\vec{e}| = 1$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} \quad \left(=: \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}) \right)$$


- ▶ Wie lassen sich Richtungsableitungen ohne Differenzialquotient berechnen?

↪ **Tagential-Ebene** (bzw. -Hyperebene) 



► **Erinnerung:**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Tangente an der Stelle x_0 :

$$t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(Lineare) Näherung, d.h. $f(x) \approx t_{x_0}(x)$, falls $|x - x_0|$ klein.

► **Tangetial-(Hyper-)Ebene**

Lineare Näherung für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ falls $|\vec{x} - \vec{x}_0|$ klein:

$$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \textcircled{?} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

- $\textcircled{?}$ sollte ein Vektor sein (& Punkt das Skalarprodukt), also

$$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

- $\textcircled{?}$ sollte eine Ableitung sein
 \rightsquigarrow Zusammenhang mit partiellen & Richtungs-Ableitungen?



- ▶ Tangente ist Gerade mit gleicher Steigung wie Funktion, d.h.

$$t'_{x_0}(x_0) = f'(x_0)$$

- ▶ Verlange analog

$$\frac{\partial T_{\vec{x}_0}}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="650 360 700 430"/>$$

- ▶ Daher gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} =: (\nabla f)(\vec{x}_0)$$

$$\begin{aligned} \nabla f &= \text{“Nabla } f\text{”} \\ &= \text{“Gradient (von) } f\text{”} \\ &= \text{“Totale Ableitung von } f\text{”} \end{aligned}$$



- ▶ Nochmal Tangentialebene

$$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

- ▶ Richtungsableitung mithilfe der Tangentialebene:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial T_{\vec{x}_0}}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) =$$
 

Also festgelegt durch Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) = (\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}$$

- ▶ ∇f steht senkrecht auf den Höhenlinien des Graphs von f 
- ▶ ∇f zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von f 



- ▶ $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ hat d erste partielle Ableitungen und d^2 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f,$$

- ▶ die die sogenannte **Hesse-Matrix** H bilden. **Beispiel:** $f(x, y)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad \dots \text{z.B. für } x^2 + x \sin y \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="818 478 868 548"/>$$

Satz: Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar und sind die zweiten partiellen Ableitungen stetig, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Folgerung: H ist dann eine symmetrische Matrix, $H^T = H$.



Satz:

- ▶ Hat die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ ein (lokales) Minimum oder Maximum, so ist $\nabla f(\vec{x}) = 0$.
- ▶ Ist umgekehrt $\nabla f(\vec{x}) = 0$ und die Hesse-Matrix $H(\vec{x})$
 - ▶ **positiv definit**, so hat f in \vec{x} ein **lokales Minimum**.
 - ▶ **negativ definit**, so hat f in \vec{x} ein **lokales Maximum**. 

Definition: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}(n, n)$ heißt

- ▶ positiv definit,
wenn für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{x} \cdot (A\vec{x}) > 0$.
- ▶ negativ definit,
wenn für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{x} \cdot (A\vec{x}) < 0$.

