

## Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Mi 13.05.15, 12:00 Uhr**,  
durch Einwurf in die **Mappe(n) vor C6P43**)

---

### Aufgabe 16

(10 Zusatzpunkte)

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

- b) Zeigen Sie: Ist  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitär, und ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $U$ , so folgt  $|\lambda| = 1$ .

### Aufgabe 17

(10 Punkte)

- a) Führen Sie die HAT für die Matrix  $B$  aus Aufgabe 13 durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix  $U$  mit zugehöriger Diagonalmatrix  $D = \overline{U}^T B U$  an.
- b) Berechnen Sie  $e^{-iCx}$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $C$  aus Aufgabe 13.  
HINWEIS: Bringen Sie die Matrix  $C$  mithilfe einer HAT in Diagonalform.

### Aufgabe 18

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix  $U$  mit zugehöriger Diagonalmatrix  $D = \overline{U}^T A U$  an.

### Aufgabe 19

(20 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

- a)  $6x^2 - 2\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1$                       b)  $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 8$   
c)  $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = 1$                               d)  $4(x^2 - y^2) + 6xy = 5$

### Aufgabe 20

(10 Punkte)

- a) Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Zeigen Sie:  $\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j$ .
- b) Gegeben sei die quadratische Form ( $\vec{x} = (x, y, z)^T$ )

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x+z) + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von  $a$  ist  $q_A$  positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat  $q_A$  für andere Werte von  $a$ ?