Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe 21.05.2015)

Aufgabe 21 (10 Punkte)
Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = x\mathrm{e}^{yz} + (x-y)z^2$, $\vec{x} = (x,y,z)^T$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z.
b) Ist f total differenzierbar? Geben Sie ∇f an.
c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = \vec{0}$ in Richtung von $(1,1,1)^T$.
d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (1,1,1)^T$ in Richtung von $(4,0,9)^T$.

Aufgabe 22 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & , \quad x=y=0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. Hinweis: $|xy| \leq x^2+y^2$ (warum?)
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f (für $\vec{x}\neq\vec{0}$).
c) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
d) Ist f im Ursprung total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 23 (Fibonacci-Zahlen) (10 Punkte)
Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $\forall\, n\geq 2$. Sei weiter

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} .$$

a) Finden Sie eine 2×2-Matrix A, so dass $\vec{b}_{n+1} = A\,\vec{b}_n$.
b) Berechnen Sie A^n (durch HAT) und bestimmen Sie damit $\vec{b}_n$ sowie a_n explizit.

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten (vgl. Vorlesung vom 23.4.15). Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}\,'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}\,, \quad \vec{y}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}\,.$$

a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,' = B\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, mit B aus Aufgabe 13.