Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 18.06.2015)

Aufgabe 34 (10 Punkte)

a) Ist $y + xy^2 - \mathrm{e}^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sei ggf. auch $f'(0)$.

b) Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[2] Berechnen Sie auch ${f^{-1}}'(0, -3, 0)$.

Aufgabe 36 (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Wo wird das Maximum angenommen?

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2 - y^2 + 2x - 2y}$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f.

b) Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$. Können Sie entscheiden, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt?

c) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Bestimmen Sie $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ und $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$.

HINWEIS: Denken Sie neben Satz 36 auch an Satz 27.

---

[2] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \vartheta(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix}$?