

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe 07.05.2015)

Aufgabe 11

(10 Punkte)

Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}' = D_\phi \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Drehung des Vektors $\vec{x}$ um den Winkel ϕ .

- Illustrieren Sie dies für $\phi = \frac{\pi}{3}$ und die Vektoren $(0, 2)^T$ und $(3, 1)^T$ mit einer Zeichnung.
- Zeigen Sie: $D_\phi^{-1} = D_\phi^T = D_{-\phi}$ (d.h. $\vec{x} = D_{-\phi} \vec{x}'$).

Aufgabe 12

(10 Punkte)

Wir möchten die folgende Menge zeichnen,

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{5}{8}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}xy = 1 \right\}.$$

- Drücken Sie dazu zunächst die Bestimmungsgleichung in den gedrehten Koordinaten $(x', y')^T = D_\phi \vec{x}$ aus (D_ϕ wie in Aufgabe 11), und wählen Sie ϕ so, dass kein Term proportional zu $x'y'$ auftritt.
- Zeichnen Sie E in einem xy -Koordinatensystem. Tragen Sie dazu zunächst das gedrehte $x'y'$ -Koordinatensystem ein.

HINWEIS: Die Gleichung $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ beschreibt eine Ellipse, vgl. Aufgabe 9.

BEMERKUNG: Wir werden bald lernen, wie man dieselbe Aufgabe mithilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren löst. Hier wird das jedoch nicht benötigt und soll auch nicht verwendet werden!

Aufgabe 13

(10 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14 (vgl. <http://spikedmath.com/517.html>) (10 Punkte)

Wir definieren eine Hyperbel als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, genannt Brennpunkte, gleich ist. Als Brennpunkte wählen wir $(\pm f, 0)$ und als Betrag der Differenzen der Abstände $2a$ mit $0 < a < f$.

- a) Drücken Sie die in der Definition genannte Bedingung, die die Punkte (x, y) erfüllen müssen, als eine Gleichung aus (die dann die Parameter f und a enthält).
- b) Bringen Sie die Gleichung aus (a) auf die Form

$$\frac{x^2}{\dots} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Drücken Sie $b > 0$ als Funktion von f und a aus.

- c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der x -Achse.
- d) Bestimmen Sie $m := \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|y|}{|x|}$ für Punkte (x, y) auf der Hyperbel.

Welche Rolle spielen die Geraden $y = \pm mx$ beim Zeichnen der Hyperbel?

- e) Zeichnen Sie die Hyperbel für $f = 5$ und $a = 3$.

Aufgabe 15 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 31.05.15 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Asymptotes of a hyperbola* und
- *Recognizing conic sections*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.