Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Mi 03.06.15, 12:00 Uhr**, durch Einwurf in die **Mappe(n) vor C6P43**)

Aufgabe 25 (10 Punkte)
Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen der Funktion f aus Aufgabe 21. Geben Sie die Hesse-Matrix $f'' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ an den Stellen $(0,0,1)$, $(0,1,1)$ und $(1,1,1)$ an.

Aufgabe 26 (10 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & , \quad x=y=0 \end{cases} .$$

a) Bestimmen Sie $g_x(0,0)$ und $g_y(0,0)$.
b) Berechnen Sie g_x und g_y für $(x,y) \neq (0,0)$.
c) Bestimmen Sie $g_{xy}(0,0)$ und $g_{yx}(0,0)$.

Aufgabe 27 (10 Punkte)
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,
b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$ und
c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist f konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 28 (10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\} .$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.
b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Aufgabe 29 [1] (10 Zusatzpunkte)

Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{$*$}$$

um auf ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} ,$$

und suchen Sie eine Matrix A, so daß $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Bemerkung: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?

Aufgabe 30 (10 Zusatzpunkte)

Wenn Sie $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können Sie auch Skalarprodukte (vgl. Taylor) und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.

Man definiert für $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation)}$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x - z \\ 2z\,\mathrm{e}^{z^2} - y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

[1] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.